Revista Tlamati Sabiduría

Título del artículo.

Representaciones gráficas de funciones complejas

Título del artículo en idioma Inglés.

Graphical representations of complex functions

Autores.

Anairis de la Cruz Benito
Marco Antonio Taneco Hernández
Catalina Navarro Sandoval

Referencia bibliográfica:

MLA

De la Cruz Benito, Anairis, Marco Antonio Taneco Hernández, Catalina Navarro Sandoval. "Representaciones gráficas de funciones complejas". *Tlamati* 6.2 (2015): 39-43. Print.

APA

De la Cruz Benito, A., Taneco Hernández, M. A. y Navarro Sandoval, C. (2015). Representaciones gráficas de funciones complejas. *Tlamati*, 6(2), 39-43.

ISSN: 2007-2066.
Publicado el 30 de Junio del 2015

Dirección General de Posgrado e Investigación
Dirección de Investigación

Revista Tlamati Sabiduría

Representaciones gráficas de funciones complejas

Anairis de la Cruz Benito[1*]
Marco Antonio Taneco Hernández[1]
Catalina Navarro Sandoval[1]

[1]Universidad Autónoma de Guerrero. Unidad Académica de Matemáticas Chilpancingo, Edificio A. Av. Lázaro Cárdenas s/n. C.U. Zona Sur, C. P. 39087. Chilpancingo, Guerrero. México

***Autor de correspondencia**
iris1790@gmail.com

Resumen

El presente reporte corresponde a una investigación realizada con el propósito de responder a la siguiente pregunta: ¿Qué aspectos se deben considerar para realizar la representación gráfica de una función de variable compleja? Lo anterior debido a que durante nuestra búsqueda de investigaciones relacionadas con el tema de interés nuestro, solamente se ubicaron investigaciones que atienden funciones reales. De ahí el interés por atender la graficación de funciones complejas elementales (lineal, cuadrática, cúbica, exponencial), considerando a éstas como transformaciones del plano R^2 en sí mismo, mostramos la geometría que representan algunas de éstas funciones cuando son aplicadas a ciertos subconjuntos del plano R^2.

Palabras clave: Función, función real, función compleja, subconjunto, gráfica

Abstract

This report corresponds to an investigation focused on find an answer to he question: What aspects should be considered for the graphical representation of a complex variable function? There is no studies about this subject, findings are reported only for real functions. Hence the interest in attending plotting elementary complex functions (linear, quadratic, cubic, exponential), considering them as transformations of the plane R^2 in itself, shows the geometry that represent some of these functions when are applied to certain subsets of the plane R^2.

Keywords: function, real function, complex función, subset, graphic

Introducción

El tema de función está incluido en los planes y programas de estudio desde Nivel Básico hasta el Nivel Superior, lo cual ha dado pie al desarrollo de diversas investigaciones (Amaya, 2008; Arrellano y Oktac, 2009; Patiño, 2009)) en las que se han atendido distintas cuestiones, por ejemplo, algunos autores analizan los cambios que experimenta la representación gráfica de la función cuando se hacen variar algunos parámetros que están involucrados en la expresión de la misma, otros han identificado las dificultades que pueden presentar los estudiantes de Nivel Medio Superior, al hacer corresponder el registro gráfico con el algebraico de algunas funciones. Por otro lado, de acuerdo con los niveles educativos cursados por los estudiantes, éstos deberían tener la habilidad de graficar funciones, sin embargo, algunas investigaciones muestran lo contrario. A través del análisis de artículos especializados en Matemáti-

Como citar el artículo:
de la Cruz Benito, A., Taneco Hernández, M. A. y Navarro Sandoval, C. (2015). Representaciones gráficas de funciones complejas. *Tlamati,* 6(2), 39-43.

ca Educativa, se han detectado y estudiado diferentes problemas relacionados con la graficación de funciones de variable real, en este trabajo se abordarán funciones elementales complejas de variable compleja. Cabe señalar que para trabajar con estas últimas se consideró importante partir del hecho de saber graficar funciones en variable real, lo que permitió dar el salto para la mostrar aspectos importantes para realizar la representación gráfica de funciones de variable compleja.

En la enseñanza superior el tema de graficación de funciones de variable compleja se ha ido relegando a segundo plano, sin embargo, para este nivel educativo es un tema importante debido a que es base para abordar posteriormente otros más avanzados. En este trabajo se tuvo como objetivo elaborar una especie de breviario, que muestra una serie de **pasos** que permiten graficar algunas funciones elementales de variable compleja. Concretamente consideramos a las funciones de variable compleja como transformaciones del plano R^2 en sí mismo. Usando este punto de vista se muestra la **geometría** que guardan algunas de ellas cuando son aplicadas a ciertos subconjuntos del plano R^2.

En el esquema 1 se muestran las funciones elementales que se analizaron durante la investigación.

Los elementos conceptuales para esta investigación fueron:

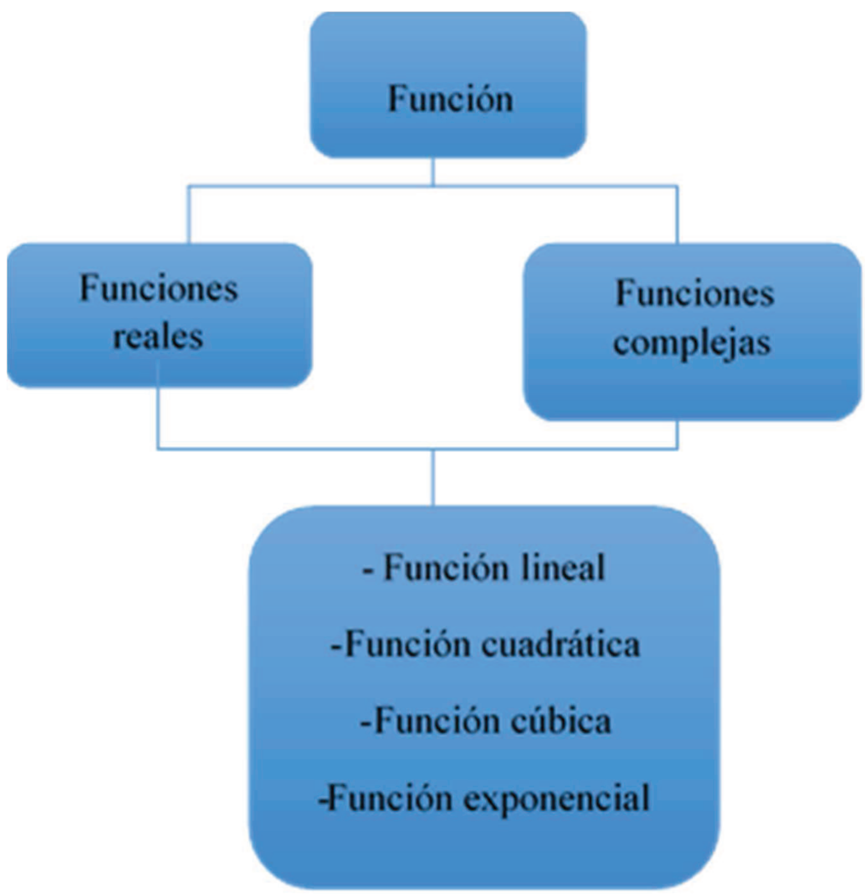
- Función.
- Función real.
- Función compleja.
- Gráfica de una función

Conceptos para funciones de variable real
- Función lineal
- Función cuadrática
- Función cúbica
- Función exponencial

Conceptos para funciones de variable compleja
- Función lineal
- Función cuadrática
- Función cúbica
- Función exponencial

Materiales y métodos

El análisis se llevó a cabo para cada una de las funciones descritas en el Esquema 1 haciendo variar cada uno de los parámetros involucrados, aquí solo se mostrará un ejemplo para el caso de la función exponencial compleja. La estrategia consistió en tomar subconjuntos *simples* del plano complejo C_z, que en este caso fueron rectas, para ver cómo son transformadas bajo la función compleja $f(z)$ vista como una transformación de R^2 a R^2.



Esquema 1. Funciones analizadas en el estudio

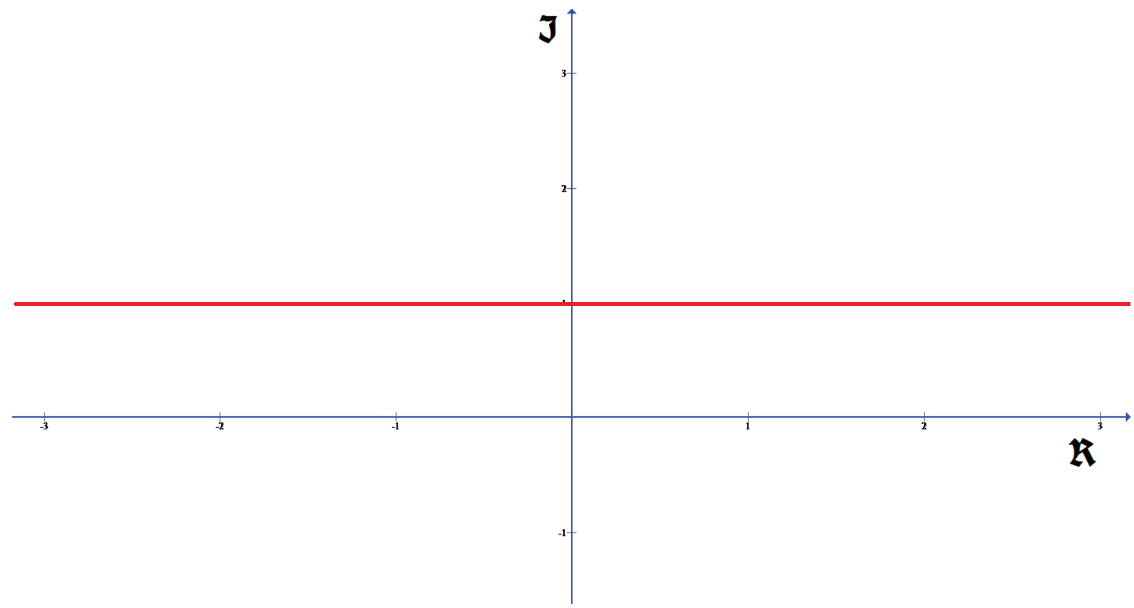


Figura 1. Recta L_1 en el plano C_z

Ejemplo. Función $f(z)=\lambda z^3$

Sean $z=x+iy$ y $\lambda=\alpha+i\beta$. Entonces

$$\lambda z^3=(\alpha x^3-3\alpha xy^2-3\beta x^2y+\beta y^3, 3\alpha x^2y-3\beta xy^2-\alpha y^3+\beta x^3)\text{----}(*)$$

Sea $\lambda=2+0i$, entonces (*) implica

$$\lambda z^3=(2x^3-6xy^2, 6x^2y-2y^3)\text{---------}(**)$$

Consideremos el conjunto

$$L_1=\{(t,1)\epsilon R^2: t\epsilon R\},$$

En el plano C_z. (véase figura 1)

Notemos que L_1 constituye una recta paralela al eje real en C_z. Ahora encontraremos el conjunto imagen de L_1 bajo f usando (**) en ella evaluaremos los pares ordenados de la forma $(t,1)$ que pertenecen al conjunto L_1, haciendo esto obtenemos que

$$f[L_1]=\{(x, y)\epsilon R^2: x=2t^3-6t,\ y=6t^2-2,\ t\epsilon R\}$$

La representación gráfica (véase figura 2) muestra el efecto que tuvo el subconjunto (recta L_1) bajo la función compleja $f(z)=\lambda z^3$ con $\lambda=2+0i$. La recta L_1 se trasformó en una curva que se intersecta a si misma bajo la función cúbica $f(z)=\lambda z^3$

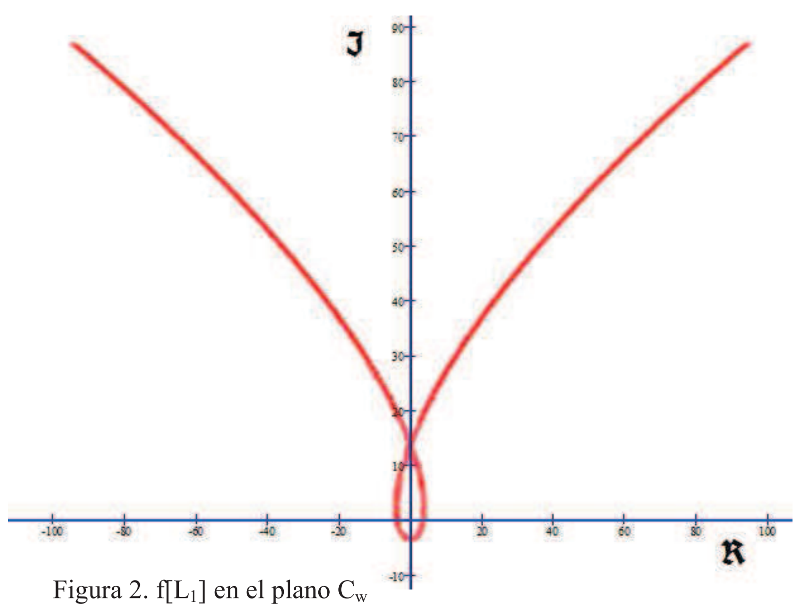


Figura 2. $f[L_1]$ en el plano C_w

Tabla 1. Resultados del análisis

Función lineal	*$f(z)=\lambda z$*	El efecto que tiene λ sobre la función $f(z)=\lambda z$ cuando esta es aplicada a cierta recta L (o cualquier subconjunto) en C_z es rotarla $\theta=arg(\lambda)$ grados medidos positivamente y expandirla.
	$f(z)=z+\gamma$	Dado $z=a+bi$. 1. Si $a>0$ entonces, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ se desplaza a unidades hacia la derecha sobre el eje real. 2. Si $a<0$ entonces, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ se desplaza a unidades hacia la izquierda sobre el eje real. 3. Si $b>0$ entonces, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ sube b unidades sobre el eje imaginario. 4. Si $b<0$ entonces, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ baja b unidades sobre el eje
Función cuadrática	*$f(z)=\lambda z^2$*	La función $f(z)=\lambda z^2$ siempre transformará rectas en parábolas. Si un par de rectas son simétricas, ya sea con respecto al eje real o al eje imaginario, en-
	$f(z)=z^2+\gamma$	La función $f(z)=z^2+\gamma$ siempre transformará rectas en parábolas, y más aún las rectas que son simétricas ya sea respecto del eje real o del eje imaginario, siempre irán a dar a una misma parábola.
Función cúbica	*$f(z)=\lambda z^3$*	Si Reλ=0 y Im$\lambda\neq 0$, entonces las rectas que son simétricas respecto al eje real en el plano C_z, resultan ser simétricas pero ahora respecto del eje imaginario en el plano C_w, y son llamadas "Folium de Descartes". Las rectas simétricas al eje imaginario en el plano C_z bajo la función $f(z)=\lambda z^3$ también resultan ser simétricas pero ahora con respecto al eje real en el plano C_w. Si Re$\lambda\neq 0$ y Imλ=0, entonces las rectas paralelas al eje real bajo la función $f(z)=\lambda z^3$ son transformadas también en curvas simétricas respecto al mismo eje. Análogamente las rectas simétricas al eje imaginario se transforman en curvas simétricas respecto al mismo eje. Si Si Re$\lambda\neq$0 y Im$\lambda\neq$0 entonces la simetría respecto a algún eje de rectas en C_z no se conserva bajo la función compleja $f(z)=\lambda z^3$.
	$f(z)=z^3+\gamma$	Si Re$\lambda\neq$0 y Imλ=0, entonces las rectas que son simétricas respecto al eje real en el plano C_z bajo la función $f(z)=z^3+\gamma$ son transformadas en curvas que guardan cierta simetría en el plano C_w respecto al mismo eje. Para las rectas simétricas al eje imaginario sucede algo similar respecto al mismo eje. Ahora si ReΥ=0 y Im$\neq$0, entonces las rectas paralelas al eje imaginario que son simétricas en el plano C_z al aplicarles la función $f(z)=z^3+\gamma$ resultan también ser simétricas en el plano C_w, y para las rectas paralelas al eje real también se conserva cierta simetría a dicho eje. Si Re$\lambda\neq$0 y Im$\lambda\neq$0 entonces ni las rectas paralelas y simétricas a algún eje resultan ser simétricas bajo la función *$f(z)$*
Función exponencial	*$f(z)=e^x$*	La función exponencial transforma rectas horizontales en semirrectas. La función exponencial transforma rectas verticales en circunferencias.

Resultados

En la tabla 1 aparecen los resultados obtenidos al realizar el análisis de cada una de las funciones haciendo variar algunos parámetros complejos.

Discusión y conclusiones

Uno de los aspectos importantes a considerar es que este estudio como tal en el ámbito educativo ha sido poco tratado, dado que en la búsqueda de antecedentes, se encontró que el numero de las investigaciones relacionadas con éste tema fue nulo. Por tanto la aportación de este trabajo a la comunidad matemática, es que en ella se muestran los aspectos que deben considerarse para realizar la representación gráfica de una función compleja de variable compleja, es decir se muestra una especia de breviario en el cual podemos visualizar la geometría que presenta cada una de las funciones analizadas.

Los resultados obtenidos en esta investigación reflejaron que la graficación de funciones complejas arroja representaciones similares a la de funciones reales (lineal y cuadrática), excepto para las funciones cúbica y exponencial, para estas no pasa lo mismo que en las primeras dos. En esta caso la función cúbica compleja transforma rectas en gráficas que se intersectan a sí mismas, y la función exponencial compleja transforma rectas horizontales en semirectas y rectas verticales en circunferencias.

Referencias

Amaya, T. R. (2008). Transformaciones básicas de las funciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 487-495.

Arrellano, F. y Oktac, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 357-365

Patiño, D. (2009). Estudio de comportamientos análogos de funciones algebraicas y trigonométricas usando transformaciones gráficas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 131-139.