Tlamati Sabiduría

Aproximación metodológica a la comprensión de problemas matemáticos

Ricardo Abreu-Blaya[1]
Abel Cabrera-Martínez[2]
Juan Carlos Hernández-Gómez[3]
José Luis Sánchez-Santiesteban[3*]

[1]*Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma Guerrero. Ciudad Universitaria, Av. Lázaro Cárdenas S/N, 39087, Chilpancingo, Guerrero, México.*
[2]*Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales, Edificio Albert Einstein (C2) 3ª Planta, 14071, Córdoba, España.*
[3]*Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma Guerrero. Carlos E. Adame 5, Col. La Garita, Acapulco, 39750, Guerrero, México.*

**Autor de correspondencia*
josesantiesteban@uagro.mx

Resumen

La resolución de problemas matemáticos es una actividad central en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Muchos investigadores en el área de la Matemática Educativa que reportan dificultades en la fase de comprensión del problema. Este artículo aborda dicha fase y brinda una propuesta de acciones metodológicas con el objetivo de guiar a estudiantes y docentes durante la fase de comprensión del problema.

Palabras clave: Comprensión, Propuesta Metodológica, Problema.

Abstract

Mathematical problem solving is a central activity in the process of teaching and learning mathematics. Many researchers in the area of Educational Mathematics report difficulties in the comprehension phase of the problem. This article addresses this phase and offers a proposal of methodological actions with the aim of guiding students and teachers during this process.

Keywords: Comprehension, Methodological Proposal, Problem

Información del Artículo

Cómo citar el artículo:

Abreu-Blaya R., Cabrera-Martínez A., Hernández-Gómez J.C., Sánchez-Santiesteban J.L. (2024). Aproximación metodológica a la comprensión de problemas matemáticos. *Tlamati Sabiduría*, 19, 112-124

Editor Asociado: Dr. José María Sigarreta

Introducción

La resolución de problema matemático (RPM) en la escuela es una actividad integradora que demanda del estudiante una alta dosis de esfuerzo mental. La RPM, por su valor formativo ha sido objeto de estudio tanto de investigadores en Matemática Educativa (*e.g.*, Polya, 1945, 1957; Schoenfeld, 1985; Goldin, 1987; de Guzmán-Ozamiz, 1991; Fridman, 1995; Santos, 1992; Nápoles y Cruz, 2000; Sigarreta, 2000; Sigarreta y Palacio, 2000; Palacio, 2003). De igual manera, por investigadores asociados con la Sicología, mismos que han realizado aportes significativos al proceso de RPM, entre los que podemos mencionar a Duncker (1945), Newell y Simón (1972), Mayer (1983), Masón *et al.*, (1989), Wertheimer (1991), Bransford y Stein (1993).

Entre las estrategias abordadas para resolver un problema matemático se encuentra la de Polya (1945), que ha inspirado y ha sido utilizado en múltiples estudios e investigaciones, para ello se basó en las observaciones que había realizado como profesor de Matemáticas, llegando a plantear que la resolución de problemas está asociada a procesos cognitivos que tienen como resultado final encontrar salida a una dificultad, una vía para sortear un obstáculo, alcanzando un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

Dicha estrategia consta de cuatro fases, mismas que son contentivas de sendas subfases, y las declara de la manera siguiente: 1. Comprender el problema; 2. Concebir un plan; 3. Ejecución del plan; y, 4. Examinar la solución obtenida. Estas fases las descompone en otras subfases donde sugiere técnicas para resolver problemas, que desde luego no garantizan que se encuentre la solución, pero constituyen una guía para la acción, mismas a las que puede recurrir cuando sea necesario durante el proceso de resolución.

Cabe destacar que la estrategia propuesta por Polya no es aplicable de forma directa en el aula, ya que el autor basa su estrategia en la idea del resolutor ideal, es decir, la persona que al resolver un problema avanza directamente desde el enunciado hasta hallar la solución, sabiendo en cada momento qué hacer y por qué hacerlo, y para concluir, examina la solución, y comprueba que es correcta. Para él, resolver problemas incluye no solamente la búsqueda de soluciones, sino que incluye argumentar y justificar todo el proceso.

Otros autores han considerado diferentes estrategias para resolver problemas matemáticos, como, por ejemplo: Geissler (1975), Jungk (1979), Schoenfeld (1991), Fridman (1995), Santos (1992), Pérez-Rodríguez (1996), Labarrere (1988), Rizo y Campistrous (1999), Sigarreta (2000, 2004). La mayoría de estos autores coincide en señalar etapas o fases las cuales se encuentran en relación directa con las planteadas por Polya (1945).

Todas las estrategias consideradas para la RPM hacen referencia a una fase o etapa de “comprensión del problema”, aun cuando la nombran de manera diferente, dicha fase está directamente relacionada con la decodificación de la información que se proporciona en el enunciado del problema. El enunciado de un problema matemático es un texto que está conformado por un sistema de signos y símbolos portadores de significado en un contexto, con intención y finalidad bien determinadas.

Dichas estrategias destacan que el resolutor (estudiante) debe de una forma u otra comprender el problema, pero no ofrecer acciones metodológicas explícitas para el logro de este objetivo. Tal situación nos conduce a la búsqueda de alternativas para mejorar la preparación de los profesores y con ello la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje en la resolución de problemas.

Materiales y Métodos

Para la elaboración de este artículo se ha recurrido al método del Enfoque Sistémico, en correspondencia con De la Peña y Velázquez (2018) debido a que ofrece garantías para la modelación de problemas de la práctica educativa, tal es el caso de la comprensión del enunciado de problemas matemáticos. A partir de este método analizamos las relaciones e interacciones de las acciones correspondiente a la fase de comprensión del problema, lo que nos permitió sistematizar los elementos de la aproximación metodológica para la comprensión de problemas matemáticos.

Gaulin (2001) aseveró: "Muchos pedagogos piensan que lo importante para realmente enfatizar la resolución de problemas no es resolver más problemas o aplicarlos en la vida cotidiana, lo importante es utilizar la resolución de problemas como el mejor vehículo para enseñar todo, enseñar a través de problemas" Coincidimos con esta afirmación, pues el propósito esencial y primordial es dotar a los estudiantes de estrategias y técnicas que les permitan resolver una amplia gama de situaciones que se le presentan en la vida cotidiana.

Se han esgrimido múltiples motivos para incluir la resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, algunas de las cuales mencionamos a continuación:

– Favorece a desarrollar el pensamiento lógico-estructural.

– Justificar la importancia de la Matemática y de los temas objeto de estudio exhibiendo su aplicación a situaciones tanto de la vida práctica como de la ciencia y la tecnología.

– Motivar el estudio de un tema a partir de la presentación de problemas que logren despertar el interés de los estudiantes por dicho tema.

– Introducir nuevos contenidos, particularmente aquellos que pueden ejemplificarse con determinados "problemas tipo".

– Consolidar e integrar contenidos matemáticos, los cuales se han explicado con anterioridad en el contexto áulico.

Desde el pensamiento clásico griego se encuentran referencias sobre la metodología para resolver problemas, pero no es hasta principios del Siglo XX que se encuentran las primeras recomendaciones a los estudiantes, los primeros intentos por "enseñar" a resolver problemas. Estos primeros intentos consisten básicamente en una serie de recomendaciones formales que intentan fijar la atención del alumno sobre la pregunta, leer cuidadosamente, encontrar datos, meditar la respuesta.

El esquema formal exigido comúnmente en la escuela para resolver problemas, y con muy poca incidencia en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, es el siguiente: datos, planteo, cálculo y respuesta. Los profesores continúan viendo la resolución de problemas como un contenido independiente del resto de los contenidos matemáticos propuestos en los programas y no como un proceso integrador de conocimientos, y esto no favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pues la resolución de problemas está en la base de toda la Matemática que se enseña. Preparar a los alumnos para enfrentar la resolución de problemas matemáticos no es enseñarles a calcular o un determinado procedimiento, es ayudarles a desarrollar sus habilidades, procesos integradores, actitudes, entre otros.

Los argumentos anteriores ponen de manifiesto algunas de las causas que pueden explicar la falta en la resolución de un problema en la escuela. Pueden señalarse muchas otras razones, pero nos referirnos a una que desempeña, desde nuestro punto de vista, un papel fundamental y es que no se comprende que las estrategias tienen un carácter heurístico, no algorítmico, no se trata de formar patrones de conducta para utilizar una u otra estrategia a partir de ciertos indicios, sino de dotar a los estudiantes de "herramientas" que puedan utilizar en diferentes contextos, sobre todo en aquellos en que no existe un "camino conocido".

Investigaciones como las desarrolladas por Schoenfeld (1985), Sigarreta (2000), Sigarreta y Palacio (2000), Rizo y Campistrous (1999), Socas, *et al.* (2014), Siniguian (2017), Barajas-Arenas *et al.*, (2018) han puesto de relieve que los estudiantes exhiben una conducta tendente hacia la resolución inmediata de los problemas, sin que medie un proceso de análisis, de razonamiento, estos reciben el problema y apenas sin leerlo ya quieren comenzar a resolverlos, y al no poder hacerlo desisten o plantean que está muy difícil. En otros casos los estudiantes observan las premisas que propone el problema y operan con las premisas del problema, por similitud con situaciones precedentes o simplemente aplican los conocimientos que están abordando en ese momento, sin previo análisis de la exigencia, o sea, si la exigencia planteada está o no vinculada con la información que se ofrece.

Lo anteriormente explicado refuerza la importancia de examinar cuidadosamente el enunciado del problema con la finalidad de precisar lo dado, lo buscado, así como esclarecer los medios necesarios para enlazar lo dado y lo buscado. Así, la compresión del problema es una acción básica y juega un papel central en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Algunas estrategias para resolver problemas matemáticos

Dentro de las estrategias que profundizan en la fase de compresión del problema están las siguientes:

Bransford y Stein (1993) proponen una estrategia para la RPM denominada IDEAL, "con el fin de facilitar la identificación y el reconocimiento de las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas”, cuyas fases son:

I: Identificación de los problemas.

D: Definición y representación del problema.

E: Exploración de posibles estrategias.

A: Actuación, fundada en una estrategia.

L: Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

La compresión del problema se aborda en las dos primeras fases. La primera fase pretende ayudar a identificar el problema. La segunda fase está orientada a precisar el problema en detalle de manera que pueda ser definido y representado con la precisión y el cuidado que sea posible.

La estrategia propuesta por Schoenfeld (1993), propone tres momentos necesarios e imprescindibles para la resolución de problemas en las clases de Matemática en lo cual involucra a estudiantes y profesores.

– Antes de resolver el problema.

– Durante la resolución del problema.

– Después de resolver el problema.

De estas fases la que está relacionada directamente con la fase de compresión es la denominada, antes de resolver el problema, misma que propone las siguientes acciones:

– Lee el problema, analiza las palabras que podría no entender.

– Usa la discusión en toda la clase, para fijar la atención en la importancia de comprender el problema.

– Ilustra la importancia de la lectura cuidadosa.

– Presta atención al vocabulario especial utilizado.

– Enfoca la atención en los datos de importancia, clarificación del proceso.

– Dar ideas para las posibles vías de resolver el problema.

Rizo y Campistrous (1999) también han incursionado en la fase de compresión del problema, planteando las siguientes acciones:

– Búsqueda de palabras claves. Esta acción está caracterizada por relacionar el significado de las operaciones aritméticas con determinados vocablos, los cuales se han usado en el contexto escolar, como significado por sinonimia de dichas operaciones aritméticas.

– Procedimiento asociado a un indicador (puede ser un símbolo, la estructura de una expresión, tipos de ecuaciones) textual. Se sustenta en la identificación de determinado enunciado asociado al problema, lo que permite relacionarlo con una tipología de problemas, de los cuales sabe cómo proceder.

– Operar con los números dados en el texto. Está relacionado con la “tendencia ejecutora” reportada en la bibliografía especializada y con la creencia de que para resolver un problema matemático siempre hay que resolver operaciones.

– Identificar los significados de las operaciones en el texto del problema. Esta acción se sustenta en el análisis de lo descrito en el enunciado del problema, el reconocimiento de los significados de las operaciones (aritméticas) involucradas y la utilización de dichas operaciones cuyos significados se corresponden con lo descrito en el enunciado.

Otra estrategia que conforma este grupo es la dada por Sigarreta y Laborde (2004), la cual consta de cinco acciones, cada una de ellas es contentiva de un sistema de acciones en forma de preguntas e indicaciones que tienen como fin la orientación hacia la acción.

Acción I. Aproximación al problema.

Acción II. Profundización en el problema.

Acción III. Ubicación del problema.

Acción IV. Selección y aplicación de una estrategia de trabajo.

Acción V. Representación y Valoración.

Las dos primeras acciones, aproximación al problema y profundización en el problema, están orientadas a la fase de comprensión del problema.

Acción I. Aproximación al problema: Operaciones a realizar: Determina los términos en los que presentes dificultades y esclarece su significado. ¿Qué elementos conoces sobre la actividad que se aborda en el problema? ¿Qué problema vas a enfrentar? ¿Has visto alguno formulado de manera parecida? ¿Está relacionado con tu entorno sociocultural?

Acción II. Profundización en el problema: Operaciones a realizar: ¿Son familiares los términos que intervienen en la formulación del problema? Subraya las expresiones que consideres de mayor valor semántico. Busca sinónimos y antónimos de dichos términos. Establece la(s) incógnita(s), es decir, qué es lo que se busca. Determina los datos que se dan de manera directa en la formulación del problema. ¿Puedes enunciar el problema con tus propias palabras? ¿Podría darse una posible respuesta? En un segundo momento se puede pensar en elaborar un esquema, diagrama, tabla, etc. ¿Son suficientes los datos? ¿Existen datos contradictorios? ¿Hay datos sobrantes? Reformula el problema. ¿Cómo se pueden relacionar los datos con la(s) incógnita(s)? Transforma el problema en otro equivalente.

La comprensión de textos (enunciado del problema) de problemas matemáticos, juega un papel esencial en su proceso de solución. Leer e interpretar el enunciado de un problema matemático no es un acto mecánico de decodificación de signos y símbolos gráficos, de determinar ideas y relaciones presentes en el mismo, sino que es una actividad de razonamiento en la que se trata de guiar las ideas y reflexiones que se obtienen de la lectura hacia la construcción de un significado para dicho enunciado. Se requiere una lectura analítica y reflexiva.

Dicha lectura favorece que el resolutor interprete el enunciado del problema y pueda construir nuevos significados a partir de su contenido, este proceso se deriva de una lectura individual en la cual se manifiestan avances, detenciones, retrocesos, se relaciona la nueva información con conocimientos previos, se formulan preguntas, se determina lo esencial y lo secundario. En correspondencia con lo anterior se hace necesario utilizar algunos elementos de la lectura analítica y reflexiva: Determinar los objetivos parciales, para obtener información precisa. ¿Qué aborda el texto?, para activar los conceptos e ideas asociado al texto. ¿Qué información se puede extraer de su estructura?, para verificar si sobra, falta o es redundante la información. Releer partes confusas. Elaborar un resumen. Plantear preguntas e hipótesis sobre el texto. Crear imágenes o representaciones mentales para visualizar información del texto (Solé, 1994).

Las acciones anteriores asociadas con las planteadas por Solé (1994), aplican de forma natural a los enunciados de los problemas matemáticos. Para lograr la comprensión de un problema o situación, es imprescindible tomar en consideración los conocimientos previos, el resolutor necesita de cierto conocimiento que le sirve de basamento y sobre el cual construye el nuevo conocimiento, destacando los rasgos más importantes y estables del nuevo conocimiento y relacionándolo con el conocimiento anterior.

La compresión de un problema se sustenta en un intercambio dinámico donde el mensaje que transmite es decodificado por el resolutor, al mismo tiempo el mensaje incide en el resolutor potenciando, reordenando o reformulando sus experiencias. Por tanto, la interacción entre el resolutor y el mensaje constituye la base de la decodificación del mismo, puesto que, en este proceso de decodificación, el resolutor vincula la información que se presenta, en el enunciado del problema, con el conocimiento que posee. En consecuencia, la esencia del proceso de decodificación de la información que trasmite un mensaje se sustenta en el establecimiento de la conexión de la nueva información con la ya existente.

Comprender determinada situación es hacer una interpretación razonable, reflexiva e inteligente. La interpretación básicamente es construcción de significado y adquisición de conocimientos. Por tanto, comprender el enunciado de un problema matemático presupone la construcción de significado a partir del mensaje escrito y adquisición de conocimientos.

Según Garriga (2003), efectuar la comprensión de un texto dentro del tratamiento metodológico comprende:

– Percepción del texto (lectura o audición).

– Reconocimiento de las palabras claves.

– Determinación de los grupos semánticos o ideas esenciales.

En el mismo sentido Neri y Zalazar (2007) ofrece elementos para la comprensión de textos, de ellos asumimos para este estudio los siguientes: Trabajo con las palabras claves y de difícil comprensión que aparecerán en el texto. Realización de preguntas predictivas.

Para la comprensión de los problemas matemáticos, se debe, en un primer momento, traducir el contenido del mismo del lenguaje común al lenguaje matemático, luego para interpretar el texto tenemos que decodificar la idea central de éste a partir de la utilización entre otros recursos de: símbolos matemáticos, operaciones, representación gráfica, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, etc.

Resultados

Aproximación metodológica a la comprensión de problemas matemáticos

Un porcentaje importante para alcanzar el éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de un problema matemático está dado en la comprensión que se tenga del mismo. Esta es una de las principales dificultades, sino la principal dificultad, que enfrentan los profesores de matemática para guiar a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas matemáticos, debido a que no cuentan con la preparación requerida para ello. La siguiente propuesta constituye una aproximación metodológica para facilitar el logro de este objetivo.

1. Lectura reflexiva del enunciado del problema. Realizar la lectura reflexiva del enunciado del problema como aspecto fundamental para su comprensión, logrando así una representación mental clara de la situación que se está leyendo. Analizar los conceptos, las ideas y relaciones que se expresan, determinando de qué trata el problema. ¿Qué es lo pedido o buscado? ¿Qué es lo dado o conocido? ¿Son suficientes los datos? ¿Existen datos contradictorios? ¿Hay datos sobrantes? Releer las partes confusas, reconocer los términos o conceptos claves y las ideas principales expresadas en el mismo.

2. Identificar los conceptos y frases de mayor carga semántica. Estas son las frases y conceptos claves del problema que le confieren significado en un contexto determinado. Una vez identificados se determinará el significado de los mismos, inicialmente, y en correspondencia con el contexto que involucra el problema, lo cual es esencial para el proceso de comprensión y/o decodificación de las ideas.

3. Esclarecer el significado de esos conceptos o frases. Se trata ahora de buscar todos los significados asociados a esos conceptos o frases en diferentes contextos, y otras formas de representar la misma idea, lo cual nos ayuda a poder descifrar y decodificar frases e ideas. Siempre tratando de contextualizar esos significados con las exigencias del problema.

4. Dividir el enunciado del problema en partes lógicas. Esta separación del enunciado del problema en sus partes lógicas o ideas principales es muy importante porque así queda dividido en partes más pequeñas, sin perder su idea central, lo cual facilita poder desmenuzar su significado y lograr una mejor y más rápida comprensión. Para esta separación se pueden tener en cuenta los signos de puntuación y los conectores. Estas partes lógicas pueden ser escritas de manera separada para que nos faciliten su comprensión.

5. Traducir cada parte lógica, del lenguaje común al lenguaje matemático. Para ellos se utilizará la representación adecuada (algebraica, geométrica o analítica), seleccionada cuidadosamente en correspondencia con las exigencias y el significado de cada parte. Se determinarán y se representarán las relaciones matemáticas tomando en consideración las ideas representadas en cada parte lógica, valorando si es necesario, la posibilidad de elaborar medios auxiliares para ayudar a comprender la situación.

6. Interpretar el enunciado del problema completo. Se logra cuando se es capaz de emitir juicio(s) contextualizado(s) acerca del enunciado del problema, es decir, el resolutor logra plantear con claridad que es lo que se quiere obtener, si puede enunciarlo de otra manera o en forma equivalente. Si puede formular un modelo matemático adecuado (una ecuación, un sistema de ecuaciones, una función, etc.) que sirva para darle solución al problema, tomando en consideración las interpretaciones hechas en el paso anterior.

7. Extrapolación. Aquí puede valorarse si es posible formular otro modelo y resolverlo por otra vía, si puede ser generalizado, si es posible que el problema pueda ser planteado en otro contexto.

Ejemplos:

A continuación, se proponen tres problemas resueltos donde se aplica la aproximación metodológica para la comprensión de problemas matemáticos.

P1) Hace 10 años la edad de Juan era las 3/5 partes de la edad que tendrá dentro de 20 años. Cuál es la edad actual de Juan.

En este caso no existen palabras de difícil significado, se pueden obtener tres partes lógicas, una sería: hace 10 años la edad de Juan era, la otra sería: la edad que tendrá dentro de 20 años y la última: la edad actual de Juan. La dificultad está dada en que intervienen tres tiempos gramaticales en el problema, presente, pasado y futuro. La Tabla 1 presenta una traducción del lenguaje común al lenguaje matemático de las partes lógicas del enunciado del problema. Para completar la tabla debemos saber que para conocer la edad que se tenía hace 10 años basta con restar 10 a la edad actual y, de manera análoga, para calcular la edad que se tendrá dentro de 20 años se debe sumar 20 a la edad actual, y de manera general, cómo obtener una edad a partir de la siguiente o de la anterior. Se debe ser cuidadoso al declarar las variables, pues esto puede hacerse de varias formas, teniendo en cuenta las relaciones dadas en el enunciado del problema, es decir, depende de la edad de referencia tomada para expresar las otras dos edades según el tiempo. Nótese que según elijamos la variable se van a obtener modelos (analítico–algebraico) equivalentes.

Después de elaborada la tabla, se procederá a la interpretación total (relacionar las partes lógicas) de manera que podamos encontrar el modelo que nos conduzca a la solución del problema, en este caso resulta que dicho modelo es una ecuación lineal.

<u>Primera vía de solución algebraica</u> (utilizando la primera interpretación). Sea X la edad actual que se tomó como referencia porque las demás edades dependen de ella por suma o resta. Escribir el modelo (ecuación) que resulta de la interpretación del enunciado del problema, en este caso, no resulta difícil debido a que se conocen las expresiones que intervienen.

Tabla 1: Traducción del lenguaje común al lenguaje matemático de las partes lógicas del enunciado.

Edad de Juan	Edad hace 10 años	Edad actual	Edad dentro de 20 años
Primera interpretación	$X - 10$	X	$X + 20$
Segunda interpretación	$X - 30$	$X - 20$	X
Tercera interpretación	X	$X + 10$	$X + 30$

$$X - 10 = 3/5\,(X + 20)$$

cuya solución es $X = 55$, lo cual implica que la edad actual de Juan es 55 años.

En la confección de la tabla también se tuvieron en cuenta otras posibilidades. Declarar como variable la edad que se tendrá dentro de 20 años y luego restar 20 para la edad actual y 30 para la edad hace 10 años o también comenzar declarando como variable la edad que tenía hace 10 años y obtener las restantes por suma. Es importante que estas variantes no dejen de analizarse, pues constituyen parte de la comprensión del problema, puesto que conducen a formular diferentes modelos mediante los cuales se obtiene la solución al problema.

Segunda vía de solución aritmética. La variante de solución presentada aquí es aritmética, para la cual consideraremos la relación parte-todo. Tomaremos como el todo a la edad de Juan dentro de 20 años, una de las partes es la edad de Juan hace 10 años, la cual está relacionada con las $3/5$ partes (del todo) de la edad de Juan dentro de 20 años, por lo que la otra parte (del todo) de la edad de Juan dentro de 20 años, o sea los $2/5$ de la edad de Juan dentro de 20 años es igual a 30 años. Entonces, la edad que tendrá Juan dentro de 20 años es de 75 años, y por tanto, la edad actual de Juan es 55 años. El gráfico de la Figura 1 ilustra el razonamiento previo.

P2) Poeta español que vivió en el siglo XIX y es considerado un clásico absoluto del movimiento romántico en este siglo. Influye notablemente en la obra de poetas del siglo XX como Antonio Machado y Rafael Alberti. Se conoce que el año de su nacimiento es un número par, además la suma de sus cifras básicas es 18. ¿En qué año nació este poeta?

El problema presenta un enunciado con una información que le aporta cultura general al estudiante, además, contiene conceptos o términos que están relacionados con lo que se pide en el problema. Para una mejor comprensión del problema, separemos su enunciado en las partes lógicas y aclaremos el significado de cada una de estas partes.

Partes lógicas

Poeta español que vivió en el siglo XIX y es considerado un clásico absoluto del movimiento romántico en este siglo. Significa que desarrolló completamente su vida en el siglo XIX, o sea entre 1800 y 1899, por consiguiente, el año de su nacimiento tiene la forma $\overline{18ab}$. Este es un elemento importante en la búsqueda de lo que se quiere. Además, como información adicional se obtiene que este poeta es de nacionalidad española y alcanzó renombre dentro del romanticismo como literato (nótese que dicha información es irrelevante en la resolución del

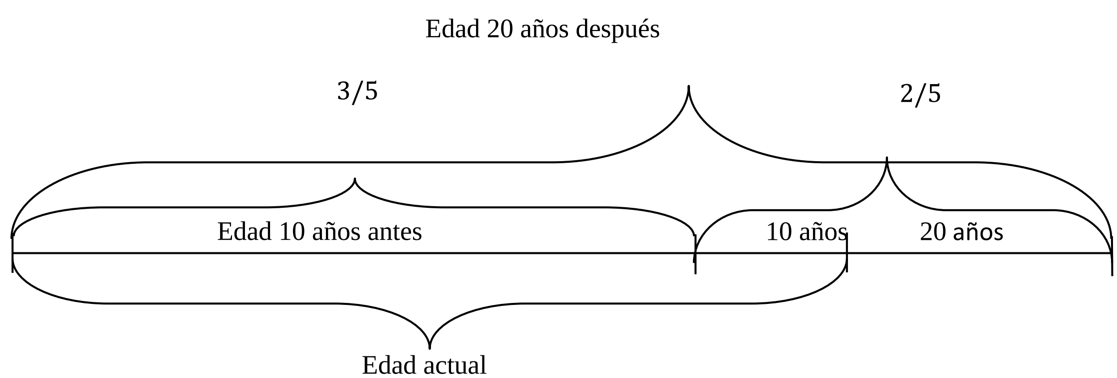

Figura 1. Modelado gráfico del problema.

problema). *Influye notablemente en la obra de poetas del siglo XX como Antonio Machado y Rafael Alberti*. Esta idea tampoco aporta elementos para la resolución, tienen como finalidad enriquecer el acervo cultural del estudiante. *Se conoce que el año de su nacimiento es un número par*, significa que el número buscado termina en un dígito par, o sea, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. *La suma de sus cifras básicas es 18*. Esta última parte quiere decir que $1 + 8 + a + b = 18$, lo que equivale a decir que $a + b = 9$, por lo que se tendría que $a \in \{9, 7, 5, 3, 1\}$. De todo lo antes expuesto se deducen las siguientes posibilidades para el año de nacimiento del poeta: $1890, 1872, 1854, 1836, 1818$. Observemos que por las condiciones dadas en el problema no se puede saber exactamente el año de nacimiento del poeta. Este es un problema con datos insuficientes y datos superfluos.

P3) Un cuadrado y un triángulo equilátero están inscritos en una circunferencia de radio unitario, además, un vértice del triángulo coincide con uno del cuadrado. Hallar el área común al triángulo y al cuadrado.

En este problema aparecen conceptos o términos claves en el proceso de resolución. Separemos el enunciado del problema en sus partes lógicas y aclaremos el significado de cada una de estas partes.

Partes lógicas

Un cuadrado y un triángulo equilátero están inscritos en una circunferencia de radio unitario. Significa que tanto los vértices del cuadrado como los del triángulo equilátero yacen en la circunferencia de radio una unidad, por otro lado, que sean cuadrado y triángulo equilátero implican un grupo de propiedades y relaciones métricas que podemos utilizar en el proceso de comprensión y resolución. También debe considerarse en el proceso de resolución las relaciones de ángulos inscritos en la circunferencia y teoremas relativos. Son conceptos con gran carga semántica: cuadrado, triángulo equilátero y polígono regular inscrito en la circunferencia (Figura 1).

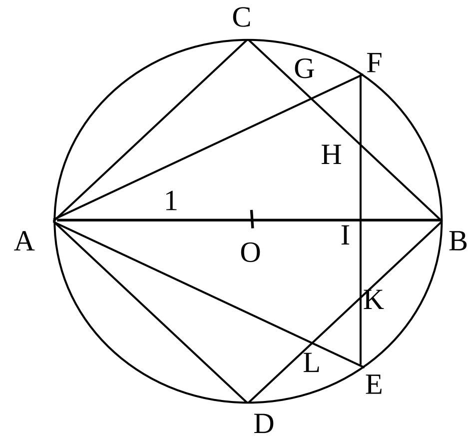

Figura 1 Figura de análisis

Un vértice del triángulo coincide con uno del cuadrado. Esta condición significa que tenemos que fijar un vértice de tal forma que éste pertenezca a las dos figuras. Esta parte del enunciado del problema no luce muy prometedora, pero en un análisis más profundo de esta condición, podemos ver que la misma fija la posición del triángulo en relación con el cuadrado y de esta manera la figura geométrica que se tiene es única, de donde se tienen relaciones de simetría de la figura, aspecto que facilitará la búsqueda de la exigencia del problema (el área común al triángulo y al cuadrado).

Para facilitar la comprensión del problema y la búsqueda de la solución dibujaremos una figura de análisis: Sea la circunferencia de centro en O y diámetro AB (2 unidades), $ACBD$ cuadrado y AEF triángulo equilátero inscritos en la circunferencia: A vértice común a ambos polígonos. Lo que se pide de acuerdo con la figura elaborada es determinar el área del pentágono $AGHKL$.

Primera vía de solución (Geometría Euclidiana). Usamos la técnica de descomponer la figura (que se desea obtener el área), en figuras cuyas áreas se calculen de manera sencilla (ver Figura 2), para ello tomaremos en consideración la simetría de la figura, el área que se pide calcular es: $A_{AGHKL} = 2(A_{AGB} - A_{BHI})$. Para lograr este objetivo, tracemos GM perpendicular a AB (M yace en AB) y unimos a B con F.

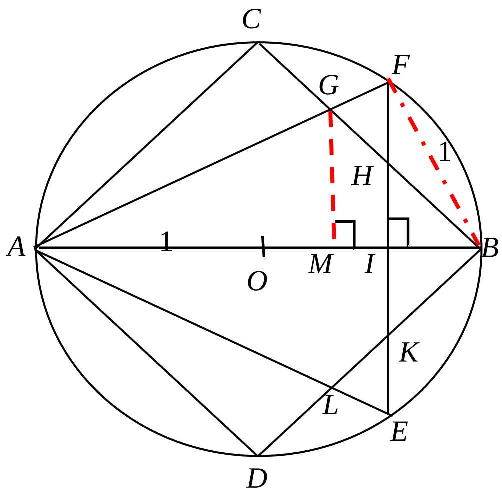

Figura 2. Figura de análisis.

La figura es axialmente simétrica con respecto al diámetro ($AB = 2$). Tenemos que $BF = 1$, ya que el triángulo ABF es rectángulo en F (observa que $\measuredangle BFA$ está inscrito en la semicircunferencia), el diámetro es 2 y el ángulo opuesto $\measuredangle BAF = 30^o$. Además, aplicando el teorema de Pitágoras al mismo triángulo se tiene que $AF = \sqrt{3}$, lado del triángulo equilátero AEF.

El $\measuredangle BFE = 30^o = \measuredangle BFI$ por estar inscrito en el mismo arco que $\measuredangle BAE = 30^o$, y el triángulo BFI es rectángulo en I por lo que el cateto que se opone al ángulo de 30^o es la mitad de la hipotenusa. De esta manera, $BI = \frac{1}{2}$.

$\measuredangle ABC = 45^o = \measuredangle HBI$, ya que AB es diagonal del cuadrado y por tanto biseca sus ángulos opuestos, y como el triángulo BHI es rectángulo en I, entonces $\measuredangle IBH = 45^o\ y\ BI = HI$. Por tanto, $A_{BHI} = \frac{1}{8}$.

Ahora, calculemos la longitud de GM que es la altura relativa al lado AB del triángulo ABG. Nótese que $GM = \frac{1}{2}AG$. Para ello haremos uso del teorema de Stewart (aplicado al triángulo ABF), siendo la ceviana BG.

$$AF \cdot BG^2 = BF^2 \cdot AG + AB^2 \cdot GF - AG \cdot GF \cdot AF.$$

$$\sqrt{3} \cdot BG^2 = 1^2 \cdot AG + 2^2 \cdot \left(\sqrt{2} - AG\right) - AG \cdot \left(\sqrt{2} - AG\right) \cdot \sqrt{3}.$$

Reduciendo la expresión anterior se obtiene,

$$BG^2 = AG^2 - 4\sqrt{3}AG + 4.$$

De igual manera, se deduce que $BG^2 = \frac{AG^2}{2}$ (aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles BGM). Sustituyendo esta expresión llegamos a la siguiente ecuación: $AG^2 - 4\sqrt{3}AG + 8 = 0$.

Los valores que satisfacen esta ecuación son $AG = 2\sqrt{3} \pm 2$, pero como $AG < \sqrt{3}$, entonces

$$AG = 2\left(\sqrt{3} - 1\right).$$
$$GM = \sqrt{3} - 1.$$

Finalmente, el área buscada $A = 2(A_{AGB} - A_{BHI})$.

$$A = 2\left(\sqrt{3} - 1\right) - \frac{1}{4}.$$
$$A = \frac{8\sqrt{3} - 9}{4}.$$

Segunda vía de solución (Geometría Analítica). En esta vía utilizaremos técnicas específicas de la Geometría Analítica como es el cálculo de coordenadas de puntos de intersección entre rectas. Hagamos coincidir el eje "x" con una de las diagonales del cuadrado y al eje "y" con la otra diagonal (ver Figura 3).

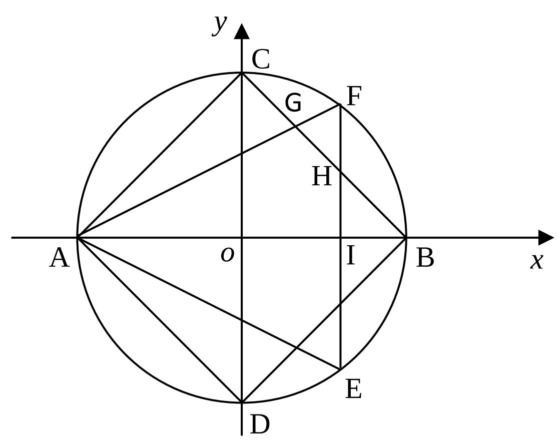

Figura 3. Figura de análisis.

Por la simetría de la figura el área que se pide calcular es: $A = 2(A_{AGB} - A_{BHI})$. Para lograr este objetivo, basta con encontrar las coordenadas de los puntos $G\ y\ H$. Como la circunferencia tiene radio unitario y tiene su centro en el origen de coordenadas, entonces tiene como ecuación $x^2 + y^2 = 1$, y, por tanto, se deduce que $A(-1;0), B(1;0), C(0;1), D(0;-1)$.

Como el eje "x" es bisectriz del ángulo $\measuredangle EAF = 60^o$, la ecuación de la recta que contiene a A y a F es $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ y la ecuación de la recta que pasa por $B\ y\ C$ es $y = -x + 1$. Con estas dos ecuaciones podemos hallar las coordenadas del punto G, $G\left(2-\sqrt{3};\ \sqrt{3}-1\right)$, $F\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, por lo que $A = 2\left(\sqrt{3}-1\right) - \frac{1}{4} = \frac{8\sqrt{3}-9}{4}$

Conclusiones

La aproximación metodológica a la comprensión de problemas matemáticos se sustenta en el papel preponderante y esencial, que desempeña la fase comprensión en el transcurso del proceso de resolución de problemas matemáticos, para emprender acciones orientadas a la búsqueda de una determinada solución. Cabe destacar que en el proceso de RPM solo se puede tener opciones de éxito si se ha comprendido cabalmente su enunciado. La propuesta constituye una herramienta didáctica para favorecer la comprensión de problemas y superar dificultades metodológicas, y de aprendizaje, presentadas tanto por estudiantes como por profesores en formación, durante la enseñanza aprendizaje de la matemática en general.

Referencias

Barajas-Arenas, C., Parada-Rico, S.E., Molina-Zavaleta, J.G. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. Educación Matemática, 30, 297-323. https://doi.org/10.24844/EM3003.12

Bransford, J.D., Stein, D. (1993). Solución IDEAL. Guía para mejor pensar, aprender y crear problemas. Editorial Labor, Barcelona. https://es.scribd.com/document/701598059/Solucion-Ideal-de-Problemas

de Guzmán-Ozamiz, M. (1991). Para pensar mejor, Editorial Labor, Barcelona. PARA PENSAR MEJOR | MIGUEL DE GUZMAN OZAMIZ | LABOR | Casa del Libro México

De la Peña-Consuegra, G., Velázquez-Ávila, R.M. (2018). Algunas reflexiones sobre la teoría general de sistemas y el enfoque sistémico en las investigaciones científicas. Revista Cubana Educación Superior, 37, 31-44.

Duncker, K. (1945). On Problem-Solving. Psychological Monographs, 58, 1-113. http://dx.doi.org/10.1037/h0093599

Fridman, L.M. (1995). Metodología para resolver problemas de Matemáticas. Grupo Editorial Ibero América S.A. México. https://es.scribd.com/document/442946959/El-Gran-Gauss-Metodologia-para-resolver-problemas-de-matematicas-2000-Lev-Milton-Fridman-pdf

Garriga, E. (2003). El tratamiento de los componentes funcionales: comprensión, análisis y construcción de textos, en "Acerca de la enseñanza del español y la Literatura". Romeo, Angelina, Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

Gaulin, G. (2001). Tendencias Actuales de la resolución de problemas. Sigma. Revista de Matemática, 19, 51-63.

Geissler, E. (1975). Metodología de la enseñanza de la Matemática de 1. a 4. grado. Tercera Parte. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba. Metodología de la enseñanza de la matemática de 1o. A 4o Grado Tercera parte (minedu.gob.bo)

Goldin. G.A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. *In*: C. Janvier (Ed.). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 125-145). Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Inc. researchgate.net/profile/Gerald-Goldin/publication/250890298_Affective_Pathways_and_Representation_in_Mathematical_Problem_Solving/links/549c88220cf2b8037138bf39/Affective-Pathways-and-Representation-in-Mathematical-Problem-Solving.pdf

Jungk, W. (1979). Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática.

Primera Parte. La Habana, Cuba: Libros para la Educación.
Labarrere A.F (1988). Como enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
Detalles de: Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas / › BiblioGTQ Koha (upn.mx)
Masón, J., Burton, L., Stacey, K. (1989). Pensar matemáticamente. Editorial Labor–MEC. Barcelona. S.A.
Pensar matemáticamente - John Mason, Leone Burton, Kaye Stacey - Google Books
Mayer, R.E. (1983). Thinking, problem solving and cognition. Editorial. W. H. Freeman, New York.
Review: [Untitled] on JSTOR
Nápoles, J.E., Cruz, M. (2000). La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. Función Continua, 8, 21-42.
La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones - Funes (uniandes.edu.co)
Neri, C., Fernández-Zalazar, D. (2007). La lectura en tiempos de Internet.
https://es.scribd.com/document/385100289/Fernandez-Zalazar-y-Neri-La-lectura-en-tiempos-de-Internet-pdf
Newell, A., Simon, H.A. (1972). Human problem solving. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
Human problem solving : Newell, Allen : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive
Palacio, J. (2003). Didáctica de la Matemática: Búsqueda de relaciones y contextualización de problemas. Fondo Editorial del Pedagógico San Marcos. Lima, Perú.
Pérez-Rodríguez, G. (1996). Metodología de la investigación educacional, Parte I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.
https://books.google.com.mx/books/about/Metodolog%C3%ADa_de_la_investigaci%C3%B3n_educac.html?hl=es&id=pfEkKAAACAAJ&redir_esc=y
Polya, G. (1945). How to solve it. Editorial Tecnos. Madrid.
Polya, G. (1957). How to solve it. Princeton University Press, U.S.A.
How To Solve It : George Polya : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive
Rizo, C., Campistrous, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. RELIME, 2, 31-45.
Santos, L.M. (1992). Resolución de problemas, el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. Revista Educación Matemática, 4, 16-24.
Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas - Funes (uniandes.edu.co)
Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press New York, New York.
Mathematical Problem Solving - ALAN H. SCHOENFELD - Google Books
Schoenfeld, A.H. (1991). Learning to think mathematically. Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics. Universidad de California, 1991.
omi.fmi.uni-sofia.bg/wp-content/uploads/2020/02/LearningtoThinkMathematically_AHS.pdf
Schoenfeld, A.H. (1993). Resolución de problemas. Elementos para una propuesta en el aprendizaje de las Matemáticas. En Cuadernos de Investigación, México D.F. Número 25, julio 1993.
Sigarreta, J.M., Laborde, J.M. (2004). Estrategias para la Resolución de Problemas como recurso para la interacción sociocultural. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, 20, 17-29.
Sigarreta, J.M., Palacio, J. (2000). Estrategia para la resolución de problemas matemáticos utilizando como recurso los números complejos. En Actas del Evento Internacional Compumat' 2000. Universidad de la Cuenca del Plata – ISP "Blas Roca Calderío"
Siniguian, M.T. (2017). Students Difficulty in Solving Mathematical Problems. International Journal of Advanced Research in Engineering and Applied Sciences, 6. 1-12.
1.pdf (garph.co.uk)
Socas, M.M., Hernández, J., Palarea, M.M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para

Profesor de Educación Primaria y Secundaria. *In:* J.L. González, J.A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M.T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J.L. Lupiáñez, L. Puig (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014 (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM. Socas2014DificultadesInvestigaciones.pdf (uniandes.edu.co)

Solé, I. (1994). Estrategia de Lectura. Editorial Garó, Barcelona. (Microsoft Word - SOL\311, Isabel. cap 4. La ense\361anza de estrategias.rtf) (utp.edu.co)

Wertheimer, M. (1991). El pensamiento Productivo. Editorial Paidós, Barcelona El pensamiento productivo - Max Wertheimer - Google Books