Tlamati Sabiduría

Descomposición de Fischer por funciones inframonogénicas generalizadas

Daniel Alfonso-Santiesteban*
Ricardo Abreu-Blaya
Yudier Peña-Pérez
José María Sigarreta-Almira

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Avenida Lázaro Cárdenas, S/N. Col. Haciendita, 39087, Chilpancingo, Guerrero, México

**Autor de correspondencia*
danielalfonso950105@gmail.com

Resumen

En esta nota se definirá un nuevo operador de Dirac fraccionario construido con un conjunto estructural φ para posteriormente obtener una descomposición de Fischer en términos de funciones (φ,ψ)-inframonogénicas. Este operador de Dirac y la variable fraccionaria generan una superálgebra de Lie isomorfa a osp(1|2). Dicha álgebra se presenta en los modelos minimales superconformes y en la cuantización de la supergravedad. Como consecuencia de la ausencia de conmutatividad se mostrarán algunas características que difieren generalmente de las que se conocen en el caso armónico clásico.

Palabras clave: Descomposición de Fischer, Operador de Dirac fraccionario, Relaciones de Weyl, Funciones inframonogénicas.

Abstract

In this note we will define a new fractional Dirac operator constructed with a structural set φ to subsequently obtain a Fischer decomposition in terms of (φ,ψ)-inframonogenic functions. This Dirac operator and the fractional variable generate a Lie superalgebra isomorphic to osp(1|2). Such an algebra occurs in superconformal minimal models and in supergravity quantization. As a consequence of the absence of commutativity some features will be shown which differ generally from those known in the classical harmonic case.

Keywords: Fischer decompositions, Fractional Dirac operator, Weyl relations, Inframonogenic functions.

Información del Artículo

Cómo citar el artículo:
Alfonso-Santiesteban, D., Abreu-Blaya, R., Peña-Pérez, Y., Sigarreta-Almira, J.M. (2025). Descomposición de Fischer por funciones inframonogénicas generalizadas. *Tlamati Sabiduría*, 21, 23-29.

Manejo editorial: Isabel Rivero Cors

Introducción

Las funciones inframonogénicas son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden:

$$\underline{\partial}[f]\underline{\partial} = 0,$$

donde

$$\underline{\partial} := e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + e_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

denota al operador de Dirac en $\mathbb{R}^m$ construido con los generadores $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ del álgebra de Clifford real $\mathbb{R}_{0,m}$. Tales funciones fueron originalmente introducidas por Malonek *et al.* (2010) cuando estos hallaron una descomposición de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos en términos de polinomios inframonogénicos. Estas exóticas funciones tienen particulares relaciones con temas afines de la Elasticidad Lineal como la posibilidad de describir el espacio de soluciones del sistema de Lamé-Navier.

El operador de Dirac en estas álgebras factoriza al clásico operador de Laplace en el sentido de que

$$\underline{\partial}^2 = -\Delta.$$

La ecuación

$$\underline{\partial}[f]\underline{\partial} = 0,$$

es conocida en la literatura como *ecuación sándwich* y puede ser vista como una versión no conmutativa de la conocida ecuación de Laplace. Usando el Cálculo Vectorial la anterior ecuación sándwich restringida a campos vectoriales tridimensionales $f = \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ puede ser reescrita como:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) + \operatorname{rot}^2 \vec{u} = 0.$$

Note que la ecuación de Laplace toma la siguiente forma también:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) - \operatorname{rot}^2 \vec{u} = 0.$$

Este sutil cambio de signo provoca que ambas ecuaciones sean totalmente diferentes en numerosos aspectos como, por ejemplo, la elipticidad fuerte.

Sea el conjunto $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\} \subset \mathbb{R}^m$. En la clase de funciones $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, donde Ω es un dominio abierto de $\mathbb{R}^m$, se definen respectivamente los operadores de Dirac por la izquierda y por la derecha como:

$$\underline{\partial}^\psi f = \sum_{i=1}^m \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f\underline{\partial}^\psi = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \psi_i.$$

Las igualdades:

$$-\underline{\partial}^\psi \underline{\partial}^\psi [f] = -[f]\underline{\partial}^\psi \underline{\partial}^\psi = \Delta$$

se satisfacen si y solo si $\psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i = -2\delta_{i,j}$, donde $\delta_{i,j}$ denota a la delta de Kronecker. Aprecie que la factorización en la ecuación anterior se tiene si y solo si ψ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Un conjunto ψ con esta propiedad es llamado *conjunto estructural*. Nõno (1983) fue uno de los primeros matemáticos que estudió estas generalizaciones dentro del Análisis Cuaterniónico y posteriormente en el contexto del Análisis de Clifford. El término *conjunto estructural* se utiliza por vez primera relacionado al Análisis Cuaterniónico en el trabajo de Shapiro y Vasilevski (1995). Las funciones que anulan a dichos operadores de Dirac se conocen con el nombre de funciones ψ-hiperholomorfas y poseen un rol esencial en el establecimiento de soluciones alternativas del tipo Papkovic-Neuber. El uso de conjuntos estructurales arbitrarios posibilita el estudio de una gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que generalizan a la anterior ecuación sándwich y por ende a las funciones inframonogénicas. La ecuación sándwich generalizada $\underline{\partial}^\varphi f \underline{\partial}^\psi = 0$ surge de forma natural al considerar dos bases ortonormales arbitrarias: φ y ψ. Las soluciones de esta ecuación son referenciadas como funciones (φ, ψ)-inframonogénicas (Alfonso-Santiesteban *et al.*, 2022) y son una generalización de las ya conocidas funciones inframonogénicas. El principal objetivo de este trabajo es mostrar las descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos de $\mathbb{R}^m$ en términos de funciones (φ, ψ)-inframonogénicas y extender estos resultados al contexto fraccionario.

Materiales y Métodos

Los métodos de investigación utilizados en el desarrollo de este trabajo estuvieron determinados por los objetivos y las tareas de investigación. A nivel teórico se emplearon los métodos: histórico-lógico, análisis y síntesis, inducción y deducción, y a nivel empírico: el experimental y la modelación; todos de gran utilidad en el estudio de fuentes de información y en el procesamiento de los fundamentos científicos. Se hace necesario el uso de un cuerpo teórico enfocado al Álgebra No Conmutativa y al Cálculo Fraccionario que a grandes rasgos incluye al producto de Fischer, la derivada de Caputo, las relaciones de Weyl y el operador de Dirac sobre un fibrado espinorial.

Fundamentos Teóricos

El álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ se genera mediante la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, sujeta a las relaciones multiplicativas:

$$e_i^2 = -1, e_ie_j = -e_je_i, i, j = 1,2, \dots, m, i < j.$$

Dicha álgebra asociativa y no conmutativa constituye el espacio lineal 2^m-dimensional generado por los k-

vectores que forman los elementos de la base canónica, es decir:

$$\mathbb{R}_{0,m} = \left\langle \begin{matrix} 1, e_1, e_2, \ldots, e_m, e_1e_2, e_1e_3, \ldots, \\ e_{m-1}e_m, e_1e_2e_3, \ldots, e_1e_2 \cdots e_m \end{matrix} \right\rangle.$$

Estas álgebras fueron introducidas por el matemático inglés William Kingdon Clifford allá por el año 1878 y representan una generalización multidimensional de los números complejos. Las álgebras de Clifford tienen innumerables aplicaciones, como operar de una manera efectiva con las rotaciones en un espacio de alta dimensión mediante los llamados grupos espinoriales, donde un ejemplo particular es el grupo de Lorentz de la Relatividad Especial. Además, estas permiten reinterpretar y manipular algebraicamente muchos conceptos de interés dentro de la Física Teórica, la Computación y la Geometría.

El espacio Euclidiano $\mathbb{R}^m$ está inmerso en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ al identificar cada vector $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ con el vector Cliffordiano $x = \sum_{i=1}^{m} e_i x_i$. Cualquier elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados $A = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < \cdots \leq m\}$ o $A = \emptyset$, y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$. Note que entonces cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ se puede reescribir de forma única como $a = [a]_0 + [a]_1 + \cdots + [a]_m$, donde $[\cdot]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota al subespacio de k-vectores definido por $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \text{span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k)$. Es costumbre identificar a $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)}$ (los conocidos escalares en $\mathbb{R}_{0,m}$) y $\mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)} \cong \mathbb{R}^m$ (el conjunto de vectores). Los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(2)}$ son llamados bivectores, mientras que los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(m)}$ son nombrados pseudoescalares. Un multivector es par o impar si pertenece a $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ siendo k par o impar, respectivamente. El producto de un 1-vector u y un k-vector F_k estará dado por un $(k-1)$-vector y un $(k+1)$-vector:

$$uF_k = [uF_k]_{k-1} + [uF_k]_{k+1},$$

donde

$$[uF_k]_{k-1} = \frac{1}{2}[uF_k - (-1)^k F_k u]$$

y

$$[uF_k]_{k+1} = \frac{1}{2}[uF_k + (-1)^k F_k u].$$

El producto interior y exterior entre u y F_k serán definidos por $u \cdot F_k := [uF_k]_{k-1}$ y $u \wedge F_k := [uF_k]_{k+1}$, respectivamente. La conjugación en $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida como el anti-automorfismo $a \to \overline{a}$, donde $\overline{e_i} = -e_i \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Una norma $||.||$ sobre $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida por $||a||^2 = [a\overline{a}]_0$ para $a \in \mathbb{R}_{0,m}$. Observe que para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ se obtiene que $||\underline{x}|| = |\underline{x}|$, la usual norma Euclidiana. Se considerarán funciones definidas sobre dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ y que toman valores en $\mathbb{R}_{0,m}$. Estas funciones pueden ser escritas como $f = \sum_A f_A e_A$, donde f_A son funciones reales. Las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad tienen el usual sentido a través de todas sus componentes reales, o sea, una función f será continua si todas sus componentes reales f_A lo son (Brackx *et al.*, 1982). En las últimas décadas el estudio del operador de Dirac ha sido el tema central en muchas áreas de la matemática. La consideración de propiedades locales de las soluciones de este operador ha conducido a una teoría de funciones, comúnmente conocida como Análisis de Clifford (Gürlebeck y Nguyen, 2014; Liu y Hong, 2018). El operador de Dirac se define como:

$$\underline{\partial} := e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + e_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

y las funciones que lo anulan son conocidas como monogénicas. El operador de Dirac tiene el mismo rol en esta teoría que el clásico operador de Cauchy-Riemann para las funciones holomorfas del plano complejo. Una función que toma valores en $\mathbb{R}_{0,m}$, definida y diferenciable en un abierto Ω de $\mathbb{R}^m$, es llamada monogénica por la izquierda (monogénica por la derecha) en Ω si $\underline{\partial} f = 0$ ($f \underline{\partial} = 0$) en Ω. El operador de Dirac puede construirse considerando una base ortonormal arbitraria de $\mathbb{R}^m$ y se define de la siguiente forma:

$$\underline{\partial}^{\varphi} := \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ denota a dicha base (Nõno, 1983). En la literatura, el término *conjunto estructural* es atribuido a estas bases ortonormales (Shapiro y Vasilevski, 1995). Así se introducen las funciones φ-hiperholomorfas (por la izquierda o derecha, respectivamente) como las funciones que pertenecen a $\text{Ker}[\underline{\partial}^{\varphi}(.)]$ o $\text{Ker}[(.)\underline{\partial}^{\varphi}]$ (Gürlebeck y Nguyen, 2014; Abreu-Blaya *et al.*, 2017). El anterior operador también factoriza al operador de Laplace como el operador de Dirac estándar. Dado otro conjunto estructural $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$, recientemente se ha estudiado la siguiente subclase de funciones biarmónicas:

$$\mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega) = \{f \in C^2(\Omega) : \underline{\partial}^{\varphi} f \underline{\partial}^{\psi} = 0\},$$

las cuales fueron nombradas como (φ, ψ)-inframonogénicas (Alfonso-Santiesteban *et al.*, 2022).

Observación 1. Cuando $\varphi = \psi = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ la clase funcional anterior se convierte en la clase de las funciones inframonogénicas, cuyas interesantes relaciones con el sistema de Lamé-Navier en Elasticidad Lineal y otros temas afines han sido objeto de estudio por numerosos investigadores (Malonek *et al.*, 2010; Moreno-García *et al.*, 2018; Alfonso-Santiesteban, 2024). Dichas funciones pueden verse como una versión no conmutativa de las conocidas funciones armónicas; pero se ha comprobado que existen significativas diferencias entre ambas como, por ejemplo, que el problema de Dirichlet deja de ser bien planteado en el sentido de Hadamard.

Observación 2. El campo vectorial de desplazamiento de los puntos de un material elástico, lineal, isótropo, homogéneo y sin fuerzas de volumen es descrito por el famoso sistema de Lamé-Navier:

$$\mu\Delta\vec{u} + (\mu + \lambda)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{u}) = 0,$$

donde $\mu > 0$ y $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$ son constantes elásticas que dependen del material. En 2018 se obtuvo sobre $\mathbb{R}_{0,3}$ una reescritura del sistema de Lamé-Navier mediante el operador de Dirac estándar:

$$\frac{\mu+\lambda}{2}\underline{\partial}\vec{u}\underline{\partial} - \frac{3\mu+\lambda}{2}\Delta\vec{u} = 0$$

y se probó que cualquier solución del sistema admite la descomposición aditiva:

$$\vec{u} = \vec{h} + \vec{\imath},$$

donde $\vec{h}$ e $\vec{\imath}$ denotan a un campo vectorial armónico e inframonogénico, respectivamente (Moreno-García *et al.*, 2018). La consideración de bases ortonormales arbitrarias en la construcción del operador de Dirac posibilita el estudio de una generalización natural del sistema de Lamé-Navier:

$$\frac{\mu+\lambda}{2}\underline{\partial}^{\varphi}\vec{u}\underline{\partial}^{\psi} + \frac{3\mu+\lambda}{2}\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}\vec{u} = 0,$$

la cual favorece nuevas descomposiciones aditivas de las soluciones de sistemas de Lamé-Navier no homogéneos.

Descomposiciones de Fischer

En 1917 Ernst Fischer demuestra que dado un polinomio homogéneo $q(x)$ con $x \in \mathbb{R}^m$, entonces todo polinomio homogéneo $P_k(x)$ de grado k puede ser descompuesto únicamente como $P_k(x) = Q_k(x) + q(x)R(x)$, donde $Q_k(x)$ es un polinomio homogéneo de grado k que satisface la ecuación $q(\underline{\partial})Q_k(x) = 0$ y $R(x)$ es un polinomio homogéneo de un grado adecuado. Aquí $q(\underline{\partial})$ es el operador diferencial que se tiene al reemplazar en el polinomio q cada variable x_j por la correspondiente derivada parcial ∂_{x_j} (identificación de Fourier). Hoy en día esta descomposición lleva su nombre. Uwe Kähler y Nelson Vieira introducen en el 2014 un operador de Dirac fraccionario utilizando la derivada de Caputo y unas relaciones de Weyl. Ellos obtuvieron una descomposición de Fischer mediante funciones que anulan a dicho operador.

La definición de polinomio homogéneo es básica para comprender los resultados de esta investigación:

Definición 1. (Polinomio homogéneo). Un polinomio es homogéneo si cada uno de sus monomios tiene el mismo grado.

Observación 3. Un polinomio homogéneo en $\mathbb{R}^m$ satisface la siguiente relación

$$P(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_m) = \beta^l P(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ y l es el grado del polinomio.

Un producto interior $\langle .,. \rangle$ en el espacio de polinomios homogéneos de grado k, el cual se denotará por $\mathcal{P}(k)$, es definido por:

$$\langle P_k, Q_k \rangle = \left[\overline{P_k(\underline{\partial})}Q_k\right]_0, \quad P_k, Q_k \in \mathcal{P}(k).$$

Este producto es conocido como producto de Fischer, y cumple las siguientes dos propiedades importantes dados dos conjuntos estructurales φ y ψ:

$$\langle x_{\varphi}P_{k-2}x_{\psi}, Q_k \rangle = \langle P_{k-2}, \underline{\partial}^{\varphi}Q_k\underline{\partial}^{\psi} \rangle,$$
$$\langle x_{\psi}x_{\varphi}P_{k-2}, Q_k \rangle = \langle P_{k-2}, \underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}Q_k \rangle,$$

donde

$$x_{\varphi} = \sum_{i=1}^m \varphi_i x_i,\ x_{\psi} = \sum_{i=1}^m \psi_i x_i \text{ y } P_{k-2} \in \mathcal{P}(k-2).$$

Denótese por $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}(k) \subset \mathcal{P}(k)$ al conjunto de todos los polinomios homogéneos (φ,ψ)-inframonogénicos de grado k. El siguiente teorema de Alfonso-Santiesteban *et al.* (2024) brinda una descomposición de Fischer por polinomios de este tipo:

Teorema 1. Sea $k \geq 2$, entonces la siguiente descomposición se cumple:

$$\mathcal{P}(k) = \mathcal{J}_{\varphi,\psi}(k) \oplus x_{\varphi}\mathcal{P}(k-2)x_{\psi}.$$

Además, los subespacios $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}(k)$ y $x_{\varphi}\mathcal{P}(k-2)x_{\psi}$ son ortogonales con respecto del producto de Fischer y se obtiene la siguiente descomposición completa:

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x_{\varphi}^s \mathcal{J}_{\varphi,\psi}(k-2s)x_{\psi}^s.$$

La anterior descomposición puede extenderse si se considera una colección de conjuntos estructurales que conforman a diferentes operadores de Dirac. De esta manera surgen las llamadas funciones (Φ,Ψ) - infrapolimonogénicas como aquellas funciones que satisfacen la ecuación de orden superior:

$$\underline{\partial}^{\varphi_1}\underline{\partial}^{\varphi_2}\dots\underline{\partial}^{\varphi_r} f \underline{\partial}^{\psi_1}\underline{\partial}^{\psi_2}\dots\underline{\partial}^{\psi_s} = 0,$$

donde $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ y $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s\}$ son dos colecciones de conjuntos estructurales. Si se denota al espacio de polinomios homogéneos (Φ,Ψ) - infrapolimonogénicos de grado k por $\mathcal{I}_{\Phi,\Psi}(k)$ entonces siguiendo un razonamiento análogo al desarrollado para la anterior descomposición se obtiene la siguiente descomposición de Fischer:

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{t=0}^{\lfloor \frac{k}{(r+s)} \rfloor} (x_{\varphi_r}\dots x_{\varphi_1})^t \mathcal{I}_{\Phi,\Psi}(k-2t)(x_{\psi_s}\dots x_{\psi_1})^t.$$

Sobre el producto tensorial $\mathbb{C}_m = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{0,m}$ y siendo $0 < \alpha \leq 1$ se introducen los vectores fraccionarios siguientes:

$$x_\varphi^\alpha = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j x_j^\alpha$$

con

$$x_j^\alpha = \begin{cases} \exp\,(\alpha \ln|x_j|); & x_j > 0, \\ 0; & x_j = 0, \\ \exp\,(\alpha \ln|x_j| + i\alpha\pi); & x_j < 0. \end{cases}$$

Remitimos al lector a consultar el trabajo preliminar de Kähler y Vieira (2014) que aborda muchas de estas ideas del Análisis de Clifford fraccionario. Se define el operador de Dirac fraccionario con respecto del conjunto estructural φ de la siguiente forma:

$$\underline{\partial}_\alpha^\varphi = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j\, {}_{+}^{C}\partial_j^\alpha,$$

donde ${}_{+}^{C}\partial_j^\alpha$ denota a la derivada de Caputo con respecto a x_j^α:

$$({}_{+}^{C}\partial_j^\alpha f)(x^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_j^\alpha} \frac{1}{(x_j^\alpha - t)^\alpha} f_t'(x_1^\alpha, \dots, x_{j-1}^\alpha, t, x_{j+1}^\alpha, \dots, x_m^\alpha)\, dt\,.$$

Con el fin de arribar a una descomposición fraccionaria sean las relaciones de Weyl:

$$\left[{}_{+}^{C}\partial_j^\alpha, x_j^\alpha\right] \coloneqq {}_{+}^{C}\partial_j^\alpha x_j^\alpha - x_j^\alpha\, {}_{+}^{C}\partial_j^\alpha = \alpha\Gamma(\alpha), \ \ \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Note que estas relaciones de Weyl generalizan la siguiente relación con la derivada usual

$$\frac{d}{dx}(xf) - x\frac{d}{dx}(f) = f.$$

Las siguientes dos definiciones son esenciales en este trabajo:

Definición 2. (Superálgebra sobre un campo K). Una superálgebra sobre un campo K es un K-módulo A con una descomposición en suma directa $A = A_0 \oplus A_1$ junto con un producto bilineal tal que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}, i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Las álgebras de Clifford son superálgebras sobre un campo determinado K. En estas los subespacios de multivectores pares e impares ejercen el rol de las componentes de la descomposición aditiva presentada en la anterior definición. En la literatura se utiliza el término de álgebra graduada por la existencia de bases de multivectores pares e impares.

Definición 3. (Superálgebra de Lie). Una superálgebra de Lie es una superálgebra no asociativa sobre un campo K cuyo producto $[.,.]$ (supercorchete de Lie) satisface:

$[x,y] = -(-1)^{|x||y|}[y,x]$ *(superantisimetría),*

$(-1)^{|x||z|}\left[x,[y,z]\right] + (-1)^{|y||x|}\left[y,[z,x]\right] + (-1)^{|z||y|}\left[z,[x,y]\right] = 0$ *(superidentidad de Jacobi).*

El vector fraccionario x_φ^α y el operador de Dirac $\underline{\partial}_\alpha^\varphi$ generan una superálgebra de Lie finita dimensional e isomorfa a $\mathrm{osp}(1|2)$, la cual es una extensión gradual del álgebra de Lie $\mathrm{sl}(2)$ (matrices reales de 2×2 con traza nula y con el corchete de Lie dado por el conmutador, las cuales se asocian al grupo especial lineal $\mathrm{SL}(2)$ de matrices con determinante igual a 1). La superálgebra de Lie $\mathrm{osp}(1|2)$ puede considerarse la más simple y puede ser vista como la versión supersimétrica de $\mathrm{sl}(2)$. Contiene tres generadores bosónicos o pares E^+, E^-, H (transforman estados bosónicos en estados bosónicos y estados fermiónicos en estados fermiónicos) y dos generadores fermiónicos o impares F^+, F^- (transforman estados bosónicos en estados fermiónicos y viceversa), cuyas relaciones de conmutación no nulas en la base de Cartan-Weyl se expresan como:

$$[H, E^\pm] = \pm E^\pm, \quad [H, F^\pm] = \pm\frac{1}{2}F^\pm, \quad \left[E^\pm, F^\mp\right] = -F^\pm,$$

$$[E^+, E^-] = 2H, \quad \{F^+, F^-\} = \frac{1}{2}H, \quad \{F^\pm, F^\pm\} = \pm\frac{1}{2}E^\pm.$$

La relación nula sería

$$[E^\pm, F^\pm] = 0.$$

La versión afín de $\mathrm{osp}(1|2)$ es relacionada con los modelos minimales superconformes por el procedimiento de reducción hamiltoniana y también aparece en la cuantización de la supergravedad en dos dimensiones. Algunos de los modelos que surgen de esta superálgebra están conectados con las supercuerdas no-críticas de Ramond-Neveu-Schwarz.

Denotaremos por $\Pi_\alpha(l)$ al espacio de polinomios homogéneos fraccionarios de grado l que satisfacen $\mathbb{E}^\alpha P_l = \alpha\Gamma(\alpha) l P_l$, donde $\mathbb{E}^\alpha = \sum_{i=1}^m x_i^\alpha \, {}_+^C\partial_i^\alpha$ es el operador fraccionario de Euler. Sea ahora $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}^\alpha(l)$ el subespacio cerrado de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene a los polinomios (φ,ψ)-inframonogénicos fraccionarios, o sea, tales que $\underline{\partial}_\alpha^\varphi P_l \underline{\partial}_\alpha^\psi = 0$. Como consecuencia del análisis y del cálculo de las relaciones que surgen entre el nuevo operador de Dirac y la variable fraccionaria se obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 2. (Descomposición fraccionaria de Fischer completa). Para $l \geq 2$ la siguiente descomposición es válida:

$$\Pi_\alpha(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (x_\varphi^\alpha)^s \mathcal{J}_{\varphi,\psi}^\alpha(l-2s)(x_\psi^\alpha)^s.$$

La importancia de la descomposición presentada en el Teorema 2 se centra en que esta es una descomposición más refinada que la obtenida por polinomios biarmónicos. Este hecho posibilita la construcción de bases ortogonales para el espacio $\mathbb{R}^m[x]$ a través de polinomios (φ,ψ)-inframonogénicos fraccionarios, las cuales difieren de las ya conocidas. El siguiente ejemplo muestra cómo la anterior descomposición ayuda al tratamiento efectivo de ciertos problemas de frontera para el operador $\underline{\partial}_\alpha^\varphi(.)\underline{\partial}_\alpha^\psi$, el cual se presenta en generalizaciones naturales del sistema de Lamé-Navier en Elasticidad Lineal multidimensional.

Ejemplo 1._Considérese el espacio $\mathbb{C}_3$ y sea el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \underline{\partial}_\alpha^\varphi f \underline{\partial}_\alpha^\psi = C & en \;\; B(0,1), \\ f = x_3^2 e_2 & en \;\; \partial B(0,1), \end{cases}$$

donde $B(0,1)$ denota a la bola unitaria de $\mathbb{C}^3$, C es una constante fija y,

$$\varphi = \{\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, -e_3\},$$

$$\psi = \{\frac{\sqrt{3}}{3}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_3\}.$$

Según la descomposición del Teorema 2 se tiene que todo polinomio fraccionario P_2 de grado 2 admite la siguiente representación:

$$P_2 = P_1 + I_2 + (x_\varphi^\alpha) D (x_\psi^\alpha),$$

donde P_1 es un polinomio fraccionario de grado a lo sumo 1 , I_2 es un polinomio (φ,ψ) -inframonogénico fraccionario de grado 2 y D es una constante. Por tanto, el anterior problema de frontera se puede reducir a analizar los siguientes dos problemas de Dirichlet más sencillos:

$$\begin{cases} \underline{\partial}_\alpha^\varphi g \underline{\partial}_\alpha^\psi = 0 & en \;\; B(0,1), \\ g = x_3^2 e_2 & en \;\; \partial B(0,1), \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \underline{\partial}_\alpha^\varphi (x_\varphi^\alpha) D (x_\psi^\alpha) \underline{\partial}_\alpha^\psi = C & en \;\; B(0,1), \\ (x_\varphi^\alpha) D (x_\psi^\alpha) = 0 & en \;\; \partial B(0,1). \end{cases}$$

Particularmente, para $\alpha = 1$ el primero de estos problemas tiene como solución el polinomio

$$g = \left[\frac{\sqrt{6}}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) + x_3^2\right] e_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) e_1 e_2 e_3,$$

mientras que el segundo problema permite determinar la constante D , obteniendo una solución al problema original.

A diferencia del caso armónico y monogénico, en general, los polinomios representados en la anterior descomposición no son mutuamente ortogonales con respecto al producto de Fischer. Sin embargo, sí se puede garantizar la ortogonalidad de los polinomios $(x_\varphi^\alpha)^p I_{l-2p} (x_\psi^\alpha)^p$ y $(x_\varphi^\alpha)^q I_{l-2q} (x_\psi^\alpha)^q$ para cuando $0 < p, q \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ con $|p - q| \geq 2$. Si denotamos por $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}^\alpha(l)$ al subespacio de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene a los polinomios (φ,ψ)-armónicos fraccionarios P_l tales que $\underline{\partial}_\alpha^\varphi \underline{\partial}_\alpha^\psi P_l = 0$, entonces siguiendo un procedimiento análogo resulta otra descomposición para $l \geq 2$:

$$\Pi_{\alpha}(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (x_{\psi}^{\alpha} x_{\varphi}^{\alpha})^{s} \mathcal{H}_{\varphi,\psi}^{\alpha}(l-2s).$$

No obstante, la ortogonalidad de los polinomios en la representación anterior se pierde incluso para cuando $|p-q| \geq 2$ y $m > 2$. El álgebra $\mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{H}(\mathbb{R})$ es muy particular y suceden estos hechos curiosos que difieren de los obtenidos para dimensiones superiores. Para profundizar en las pruebas de estos resultados se remite al lector al trabajo reciente de Alfonso-Santiesteban *et al.* (2024).

Discusión

Las descomposiciones de Fischer ayudan a encontrar bases ortonormales para el espacio de polinomios de $\mathbb{R}^m$. En el caso específico de polinomios definidos sobre la superficie de una bola se obtiene la conocida descomposición por armónicos esféricos. El mero hecho de considerar funciones con una estructura puramente espinorial posibilita que se conforme un conjunto de descomposiciones de Fischer que se diferencian de las ya conocidas del Análisis Real. Las modernas técnicas del Análisis de Clifford permiten comprender otras de estas descomposiciones que antes no se tenían naturalmente y a la vez nos proporcionan algunas pautas esenciales que se establecen por la falta de conmutatividad en el producto geométrico.

Conclusiones

El alto grado de flexibilidad que supone la consideración de conjuntos estructurales arbitrarios permite agrupar, de una manera elegante, una amplia gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que tienen una estrecha relación con la ecuación de Laplace, fórmulas alternativas de Kolosov-Muskhelishvili, transformadas de Ahlfors-Beurling, $\underline{\partial}$-problemas y mapeos conformes. Con el uso también del Cálculo Fraccionario se obtuvieron descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos de $\mathbb{R}^m$, las cuales ayudan a comprender algunos conceptos inherentes de la teoría de la supersimetría en Mecánica Cuántica. Se pudo constatar cómo la no conmutatividad del producto Cliffordiano en dimensiones superiores provoca el rompimiento de los resultados obtenidos para dimensiones menores.

Agradecimientos

Daniel Alfonso Santiesteban agradece al Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por una beca para estudios de posgrado (CVU: 1043969).

Referencias

Abreu-Blaya, R., Bory-Reyes, J., Guzmán, A., Kähler, U. (2017). On the φ-Hiperderivative of the ψ-Cauchy-Type Integral in Clifford Analysis. Computational Methods and Function Theory, 17, 101-119. https://doi.org/10.1007/s40315-016-0172-0

Alfonso-Santiesteban, D., Abreu-Blaya, R., Árciga-Alejandre, M.P. (2022). On (ϕ, ψ)-Inframonogenic Function in Clifford Analysis. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 53, 605-621. https://doi.org/10.1007/s00574-021-00273-6

Alfonso-Santiesteban, D., Abreu-Blaya, R., Peña-Pérez, Y., Sigarreta-Almira, J.M. (2024). Fractional Fischer decompositions by inframonogenic functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 539, 128468. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128468

Alfonso-Santiesteban, D. (2024). $\overline{\partial}$-problem for a second-order elliptic system in Clifford analysis. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47, 9718-9728. https://doi.org/10.1002/mma.10090

Brackx, F., Delanghe, R., Sommen, F. (1982). Clifford analysis. Research Notes in Mathematics, 76, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston.

Gürlebeck, K., Nguyen, H. M. (2014). On ψ-Hyperholomorphic Functions and a Decomposition of Harmonics. Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications. Trends in Mathematics, 181-189. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_12

Kähler, U., Vieira, N. (2014). Fractional Clifford Analysis. *In*: Bernstein, S., Kähler, U., Sabadini, I., Sommen, F. (eds) Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_13

Liu, L.W., Hong, H.K. (2018). Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity. Applied Mathematical Modelling, 54, 246-267. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.09.031

Malonek, H., Peña-Peña, D., Sommen, F. (2010). Fischer decomposition by inframonogenic functions. CUBO A Mathematical Journal, 12, 189-197.

Moreno-García, A., Moreno-García, T., Abreu-Blaya, R., Bory-Reyes, J. (2018). Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41, 3622-3631. https://doi.org/10.1002/mma.4850

Nõno, K. (1983). On the quaternion linearization of Laplacian Δ. Bull. Fukuoka Univ. Ed. III 35, 510.

Shapiro, M.V., Vasilevski, N.L. (1995). Quaternionic ψ-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. ψ-hyperholomorphic function theory. Complex Variables, 27, 17-46. https://doi.org/10.1080/17476939508814803