Revista Tlamati Sabiduría

Volumen 5, Número 2. Abril-Junio 2014

Título del artículo.

Aspectos didácticos de la aplicación de algoritmos básicos (suma, resta, división y multiplicación), usando numerales Mayas en base decimal en el conjunto de los números Naturales. Un estudio de caso

Título del artículo en idioma Inglés.

Didactical aspects of applying basic algorithms (addition, subtraction, division and multiplication) using Mayan numerals in decimal base on the Set of Natural numbers. A case study

Autor.

Juan Baltazar Cruz-Ramírez

Referencia bibliográfica:

MLA

Cruz-Ramírez, Juan Baltazar. "Aspectos didácticos de la aplicación de algoritmos básicos (suma, resta, división y multiplicación), usando numerales Mayas en base decimal en el conjunto de los números Naturales. Un estudio de caso." *Tlamati*. 5.2 (2014): 31-43. Print.

APA

Cruz-Ramírez, J. B. (2014). Aspectos didácticos de la aplicación de algoritmos básicos (suma, resta, división y multiplicación), usando numerales Mayas en base decimal en el conjunto de los números Naturales. Un estudio de caso. *Tlamati,* 5(2), 31-43.

ISSN: 2007-2066.
Publicado el 29 de Junio del 2014.

Dirección General de Posgrado e Investigación
Dirección de Investigación

Revista Tlamati Sabiduría

Aspectos didácticos de la aplicación de algoritmos básicos (suma, resta, división y multiplicación), usando numerales Mayas en base decimal en el conjunto de los números Naturales. Un estudio de caso

Juan Baltazar Cruz Ramírez[1*]

[1] Universidad Autónoma de Guerrero. UAGro Virtual. Av. Lázaro Cárdenas s/n, Cd. Universitaria Sur, Chilpancingo, Guerrero, México. C. P. 39090. Tel. +52 (01 747) 471 93 10 Extensión 3216
Autor de correspondencia
cruzramirez@uagrovirtual.mx

Resumen

Las investigaciones sobre las contribuciones culturales y sociales de diferentes civilizaciones se centran fundamentalmente en enfoques antropológicos. Aun y cuando estos estudios pueden ayudar a entender el desarrollo de la humanidad, por lo general están más centrados en un contexto social y no en disciplinas específicas como las matemáticas. El uso de representaciones alternativas y diferentes enfoques centrados en un proceso de enseñanza-aprendizaje, en lugar de rigurosas y formales matemáticas tradicionales, podría ayudar a desarrollar un pensamiento crítico centrado en romper las viejas tradiciones y proporcionar nuevas forma de razonamiento matemático.

Los numerales mayas y sus operaciones matemáticas básicas no son, en este momento, un tema muy conocido en USA. Aun y cuando en las zonas Mayas de México y Guatemala se han utilizado algoritmos como suma, resta, multiplicación y división a lo largo del tiempo, estos algoritmos mayas y sus representaciones numéricas no se enseñan en las escuelas estadounidenses.

Actualmente, las matemáticas en la escuela están estrechamente relacionadas con los números arábigos y sus algoritmos tradicionales básicos como la única realidad dentro el contexto escolar de las Matemáticas. A los estudiantes no se les enseña ninguna otra representación o algoritmos alternativos, fuera de las que está marcados por la tradición o el plan de estudios. Como resultado, los números arábigos y los algoritmos tradicionales son el único método utilizado dentro de la escuela y la sociedad. Aún y cuando las matemáticas mayas utilizan un sistema numérico de base 20, es posible traducir estas representaciones numéricas y algoritmos a una base decimal que es más usual, aplicando un sistema matemático completo y equivalente al tradicional en el conjunto de los números Naturales. Como resultado, las representaciones mayas de los números y sus algoritmos podrían ser utilizados como una forma alternativa para la comprensión y el desarrollo de conceptos matemáticos. Para este estudio, se utilizarán sólo números Naturales, considerando al numeral cero como parte de éste conjunto numérico.

Palabras clave: Algoritmos básicos, Suma, Resta, División, Multiplicación, Matemáticas Mayas.

Abstract

Studies about cultural and social contributions from different civilizations are essentially focused on anthropological approaches. Even when these studies could help to understand the development of mankind, usually are more centered on a social context, rather than specific disciplines as Mathematics. Use of alternative representations and differ-

Como citar el artículo:
Cruz-Ramírez, J. B. (2014). Aspectos didácticos de la aplicación de algoritmos básicos (suma, resta, división y multiplicación), usando numerales Mayas en base decimal en el conjunto de los números Naturales. Un estudio de caso. *Tlamati,* 5(2), 31-43.

ent approaches focused on a teaching-learning process, rather than rigorous and pure traditional Mathematics, could help to develop a critical way of thinking centered on breaking old traditions, and provide new ways of reasoning Mathematics.

Mayan numerals and their basic mathematical operations are not, at this time, a well-known issue in U.S. Even when algorithms as addition, subtraction, multiplication and division had been used through time in Mayan zones at Mexico and Guatemala, these Mayan algorithms and their number representations are not taught in American schools.

At this time, mathematics are closely related with Arabic numerals and basic traditional algorithms as the only reality within the Mathematical school context. Students are not taught in any other representations or alternative algorithms, out of that marked by tradition or curriculum. As a result, Arabic numerals and traditional algorithms are the only approach used within the school and society. Even when Mayan mathematics use a base 20 numeric system, it is possible to translate these number representations and algorithms to a more usual decimal base as a complete and equivalent Mathematical system. As a result, Mayan representations of numbers and their algorithms could be used as an alternative way for understanding and development of Mathematical concepts. For this study, only the set of Whole numbers will be used.

Key words: Basic Algorithms, Addition, Subtraction, Division, Multiplication, Mayan mathematics.

Introducción

Según el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas [*National Council of Teachers of Mathematics*], es fundamental que los estudiantes conozcan los hechos numéricos básicos para los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división (NCTM, 2009). De la misma manera, el Consejo Nacional de Investigación [*National Research Council*], indica la habilidad del cálculo numérico como como un componente principal en matemáticas (NRC, 2002). Algunos otros estudios consideran que el dominio de las habilidades básicas del cálculo numérico no se puede separar de la comprensión conceptual global y constituye la base para el desarrollo del pensamiento matemático (Sfard, 1991; Wu, 1999).

Es necesario clarificar los conceptos de los conjuntos de *Counting numbers* [Números para contar] y *Whole numbers* [Números completos] utilizados en USA (Center for Mathematics Education Project [CMED], 2007; NCTM, 2009). *Counting numbers* es el conjunto de números Naturales definido por los Postulados de Peano (el conjunto $\mathbb{N}$) y *Whole numbers* es el conjunto de números naturales en unión con el conjunto vacío (0={} o 0=Ø) o número cero. El símbolo para este conjunto ($\mathbb{N}$UØ) es $\mathbb{N}^0$**.** Podemos relacionar este contexto con la concepción de convención matemática propuesto por Martínez (2003), ya que sus diferentes propiedades y concepciones han sido integradas sistemáticamente dentro de un conjunto de conocimientos y su aplicación no entra en conflicto con los sistemas axiomáticos en los que es usada, además de completar los vacíos en las definiciones propuestas .

De la misma manera, es necesario precisar los conceptos de *Número* como el concepto matemático y *Numeral* como el símbolo o símbolos que representan al número (School Mathematics History Group [SMSG], 1960).

En los numerales hindú-arábigos, cuando hablamos de un dígito o un conjunto de dígitos como representación de un número, reconocemos el valor relativo de la posición de los numerales utilizados y su valor nominal en la misma cifra. Por ejemplo, en el número 6,666, observamos que cada dígito tiene el mismo valor nominal de 6, pero un valor relativo posicional diferente, como sigue: 6 en el extremo izquierdo tiene el valor relativo de 6000 (6 millares); el siguiente 6 tiene el valor de 600 (6 centenas); el sucesivo 6 tiene un valor de 60 (6 decenas) y el último tiene un valor de 6 unidades. En el desarrollo de algoritmos, el valor relativo es substituido por el valor nominal unitario, siguiendo el proceso algorítmico utilizando los dígitos como unidades.

Podemos observar que los algoritmos matemáticos básicos para suma, resta, multiplicación y división son casi procedimientos estándar en todo el mundo, en donde observamos varias similitudes en las operaciones desarrolladas (Baroody, Torbeyns, y Verschaffel, 2009; Delprato, 2005; Lu, 2009; Robinson y LeFevre, 2011; Rocha y Menino, 2009; Valdemoros y Ruiz, 2008). Como resultado significativo, se observa que los dígitos son vaciados de su valor relativo al desarrollar el algoritmo; esto es, las decenas y centenas se consideran y calculan como si fueran unidades (Baroody, Torbeyns, y Verschaffel, 2009; Robinson y LeFevre, 2011; Rocha y Menino, 2009), por lo que la forma de representar los números durante la ejecución de algoritmos casi nunca está relacionada con su valor relativo o posicional. En el momento en que los estudiantes resuelven un algoritmo en la escuela, el valor relativo es codificado independientemente de la posición del dígito y a continuación, se resuelve el algoritmo caracterizando los valores numéricos como unidades, sin tomar en cuenta la representación del numeral como un número completo.

Al momento que los estudiantes terminan el algoritmo, la intención es recuperar la solución obtenida como un número completo, pero esta simbolización, aunque sea comprendida por el estudiante, es usualmente despreciada al realizar el procedimiento algorítmico, debido al cálculo por unidades indicado por los procedimientos tradicionales (Lu, 2009; Delprato, 2005; Valdemoros y Ruiz, 2008). Derivado de esta práctica, observamos que los estudiantes no reconocen si el procedimiento utilizado conduce a la solución correcta del problema y muchas veces no son capaces de corregir estos errores.

Existen numerosos estudios que informan varios patrones y conceptos erróneos relacionados con la solución de los algoritmos tradicionales básicos (suma, resta, multiplicación y división) con números Naturales (Ashlock, 2010;

Wu, 1999; Mercer y Mercer, 1998). Algunos tipos comunes de patrones de error para las operaciones principales son: los errores de datos obtenidos, errores cometidos debido a errores en la memorización por parte del estudiante o por falta de precisión y uso sistemático de un procedimiento o estrategia inexacta/ineficiente (Ashlock, 2010).

Varios errores aparecen porque un estudiante no ha dominado los detalles matemáticos básicos. Usualmente, estos errores en general no indican una falta de comprensión del concepto, lo que muestran es una falta de profundidad en el conocimiento matemático. Por lo general, se producen debido a las características particulares de aprendizaje que posee el estudiante. De la misma manera, los errores cometidos por fallas en la memorización o debido a la falta de exactitud están relacionados con estas mismas características de aprendizaje. El patrón más grave se relaciona con un uso sistemático de un procedimiento o estrategia inexacta/ineficiente, porque generalmente este tipo de patrón de error indica que no se hay comprensión de un concepto matemático importante (Mercer y Mercer, 1998).

Los logros matemáticos desarrollados por los mayas son uno de los más avanzados de las civilizaciones antiguas. Estos conocimientos fueron el resultado de un proceso de concientización, concebido como el movimiento del espacio que parece ser el centro de su cultura. Para ellos, el universo no es una realidad estática, sino un movimiento constante, con una gran capacidad para evolucionar y estas características están representados en su sistema matemático (Calderón, 1996; Lam, Magaña y De Oteyza, 2008). Debido a la falta de una teoría científica relacionada con el conocimiento matemático maya y a que no hay suficientes estudios relacionados con este enfoque en el proceso enseñanza/aprendizaje en la escuela, se hace necesario reconstruir este conocimiento con el fin de identificar y adaptar nuevos códigos, representaciones y algoritmos relacionados con estos procesos de pensamiento y entendimiento de las matemáticas.

Con el fin de investigar una representación numérica diferente desarrollada como un sistema matemático paralelo al tradicionalmente enseñado en la escuela (Schiro, 2004), se propone un enfoque basado en los numerales mayas y sus algoritmos en el conjunto de los números Naturales en base 10 o decimal. Éste enfoque podría ayudar a mejorar y rectificar algunos patrones de error detectados en el desarrollo de algoritmos básicos para suma resta, multiplicación y división.

Es de hacer notar que esta propuesta está desarrollada como una propuesta didáctica, no como un substituto de la matemática tradicional y rigorista enseñada en la escuela.

Materiales y Métodos

La Universidad de Southern Illinois en Carbondale, Illinois, USA se guía por los principios éticos establecidos en el Informe Belmont y por los requisitos del Código de Regulaciones Federales (45 CFR 46) en los Estados Unidos de América. De acuerdo con estos principios, este proyecto ha sido revisado y aprobado por el Comité de Investigación con Sujetos Humanos de la Universidad de Southern Illinois.

Planteamos una metodología centrada en analizar e identificar las diferencias y similitudes entre los algoritmos tradicionales que se enseñan en la escuela y los algoritmos mayas propuestos. Esta comparación entre estos dos enfoques es útil para proponer nuevas ideas con el fin de encontrar soluciones a algunos problemas relacionados con los patrones de error (Cantoral, 2000, Cantoral y Montiel, 2001, Cruz, 2009) y las falsas ideas relacionadas con la solución de los algoritmos para suma, resta, multiplicación y división.

Debido a la falta de referencias y resultados acerca del paradigma matemático de los mayas y con el fin de generar teorías que nos permitan analizar, identificar y explicar como un posible desarrollo de una teoría emergente relacionado con este enfoque podría ayudar a mejorar el pensamiento matemático, se desarrolló una propuesta basada en el enfoque de investigación propuesto por la Teoría Fundamentada [*Grounded Theory*] (Glaser y Strauss, 1967). Este enfoque fue desarrollado con el fin de permitir conectar el análisis ulterior de los resultados con una teoría que podría ayudar a explicar y fundamentar los resultados obtenidos.

De la misma manera, aún y cuando la Teoría Fundamentada puede utilizar el diseño emergente, el muestreo teórico, el análisis comparativo constante, la saturación teórica y la sensibilidad teórica como metodologías de investigación, para este estudio se aplicó el método comparativo constante (Glaser y Strauss, 1967) como metodología de investigación en este estudio. Esta metodología permitió también identificar un fenómeno, objeto, evento o ajuste de intereses y conceptos localizados, así como principios, características estructurales o de procesos relacionados con el área de estudio. Para este estudio, los métodos de recolección de datos incluyeron la escritura de diarios, observación, análisis de documentos y entrevistas.

El participante en este estudio fue un hombre adulto, hablante nativo del idioma Español y estudiante de primer año en una universidad en el estado de Illinois, USA. Todo el estudio fue desarrollado en el idioma Inglés. Como se indicó antes, la falta de estudios formales y resultados relacionados con las matemáticas mayas utilizando números enteros en base decimal, nos permite observar y analizar los hallazgos en este estudio, incluso cuando no hay una gran población que analizar.

Una primera aproximación al participante se centró en actividades introductorias desarrolladas expresamente para él. Estas actividades estaban relacionadas con la demostración de los algoritmos Mayas, con el fin de demostrar de forma matemática, la validez y la fiabilidad de este conocimiento.

Se programó la escritura de un diario de trabajo como una herramienta para la observación y análisis. Al inicio del estudio, se planearon cuidadosamente actividades centradas en recopilar los datos primarios que podrían hacernos observar las creencias generales sobre el uso de algoritmos mayas. Estas observaciones se documentaron de forma cronológica en cinco sesiones.

Después de aprender a los usar algoritmos mayas, fueron transcritas en el diario las experiencias pertinentes. De acuerdo con Strauss y Corbin (1990), los códigos de procesamiento de datos (tales como Abierto, Axial y Selectivo) fueron desarrollados con el fin de analizar el proceso de investigación, además de servir de guía para las decisiones teóricas posteriores. La codificación de las respuestas dadas por el estudiante a partir de preguntas previstas de antemano, fueron útiles para mejorar la recogida y análisis de los datos obtenidos. Otras entrevistas se centraron en las

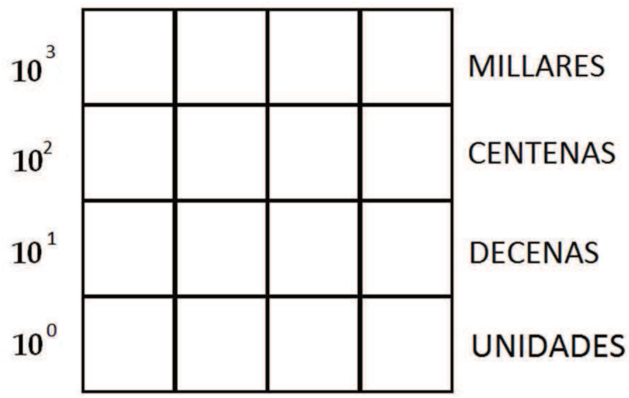

Figura 1. Tablero maya para los cálculos

experiencias y percepciones relacionadas con los algoritmos tradicionales enseñados en la escuela.

Otra fuente de datos fue la observación del sujeto en la aplicación de los conocimientos adquiridos, mediante el planteamiento de problemas matemáticos diseñados específicamente para su uso con estos algoritmos.

Mediante el análisis de los documentos, fuentes de datos y entrevistas con el participante, nos enfocamos en determinar reflexiones generales de toda la experiencia de aprendizaje, ayudando a facilitar y a afinar la comprensión de los ejercicios propuestos. Esto nos permitió obtener información adicional acerca de actividades específicas, afinando los resultados obtenidos.

El análisis de datos fue apoyado con las notas de campo y observaciones, con un orden cronológico de las actividades y enfocándonos específicamente en los códigos de contenido pedagógico.

Las entrevistas y otras fuentes de datos fueron también codificadas y analizadas. Algunas de las reglas de decisión seguidas para la entrada de datos y la selección de respuestas analizadas incluyen: (1) el uso de códigos relacionados con los cuatro tipos básicos de algoritmos reportados en los resultados; (2) la consideración de explicaciones contradictorias observadas, a pesar de que no fueron mencionados en todos los tipos de datos y (3) la selección y registro de los tipos de reflexión y/o comunicativas observadas en el participante.

Se utilizó la triangulación de datos con tres profesores para garantizar la fiabilidad de este estudio. Las respuestas analizadas dentro del proceso de triangulación, durante y después del desarrollo de las sesiones didácticas tuvieron el propósito de avalar la comprensión de significados previstos del participante, así como la fidelidad en el análisis de datos.

Figura 2. Números mayas y su equivalencia en base decimal

Dos representaciones son materiales básicos en este estudio: un arreglo de doce cuadrados distribuidos como un tablero organizados en un arreglo cuadrado de filas y columnas, mismo que utilizamos para la representación del valor relativo para las unidades, decenas, centenas y millares, en donde la fila superior indica la posición relativa máxima (véase figura 1) y los Numerales mayas, que solo sólo tienen dos símbolos numéricos, un punto con un valor nominal de uno y una línea con un valor nominal de cinco, con la equivalencia de cinco puntos (véase figura 2).

En lugar de usar cualquiera de las representaciones mayas para el número cero y con el fin de evitar confusiones con este tradicional sistema numérico, utilizamos un nuevo símbolo (un círculo con una cruz en el interior) con la equivalencia de dos líneas o diez puntos. Denominaremos a este símbolo como "Completo" ya que al momento en que se utiliza, es necesario remarcar que este símbolo no se escribe solo, siempre se representa con al menos un punto en el nivel superior (véase figura 3).

Para representar un número, podemos combinar estos símbolos y sus representaciones posicionales escribiendo los números mayas en las celdas correspondientes en el tablero. Cada columna siempre se destaca por la posición asignada (unidades, decenas, centenas y más) y cada punto o línea dentro de estas filas, representa a su valor multiplicado por el valor de la posición en base diez, independientemente de cuantos puntos o rayas existan dentro de la celda. Como resultado, tenemos un sistema numérico posicional con sólo tres símbolos (véase figura 4).

Hay tres características básicas relacionadas con estos numerales:

1. **Equivalencia de valor**: los números puede representarse de varias maneras y el valor no cambia. Como resultado, el estudiante puede usar una estrategia de conteo con una comprensión posterior del concepto de agrupación (véase figura 5).

2. **Agrupar**: Informalmente, esta acción se conoce como “prestar” (*borrow* en idioma Inglés) al desarrollar un algoritmo básico y está basada en la propiedad asociativa de la suma de números Naturales. Esta estrategia es generalmente el último paso del algoritmo de la suma, pero se puede utilizar según sea necesario (véase figura 6).

3. **Desagrupar**: Informalmente, esta acción se conoce como “llevar” (*carry* en idioma Inglés). Debido a la equivalencia de los valores antes señalados, esta estrategia se utiliza con el fin de evitar algunos conceptos erróneos relacionados con la dualidad del valor de cero. Utilizando el símbolo "completo" y desagrupando los numerales, podemos obtener una representación equivalente sin ningún cambio en el valor del número.

Con el fin de identificar y analizar los patrones de error, así como observar algunos conceptos erróneos (Ashlock, 2010; Wu, 1999; Mercer y Mercer, 1998), cuatro cuestionarios relacionados con sumas, restas, multiplicaciones y división (40 problemas en total con diez problemas de cada algoritmo básico) basados en estos patrones erróneos se aplicaron en el desarrollo del estudio. A partir de estos cuestionarios, hemos seleccionado algunos de los resultados con el fin de utilizar estos problemas con algoritmos mayas para un análisis y discusión de los patrones de error codificados. Un resumen de los patrones de error conocidos y posterior codificación fue desarrollado para este estu-

Tabla 1

Definición de códigos de patrones de error relacionados con los algoritmos básicos.

Codigo	Patrón erróneo
A.Add	Las sumas de las unidades y decenas se calculan sin reagrupar.
B.Add	Los dígitos se añaden de izquierda a derecha.
A.Sub	El número menor siempre se resta del número mayor.
B.Sub	La sustracción de cero tiene como resultado el valor del número mayor.
C.Sub	Cuando se necesita reagrupar más de una vez, el valor correcto no se resta de la columna "prestada" en el segundo reagrupamiento.
A.Mul	El número reagrupado se añade al multiplicando en la columna antes de realizar la operación de multiplicación de las decenas.
A.Div	El cero en el cociente se omite en la división.

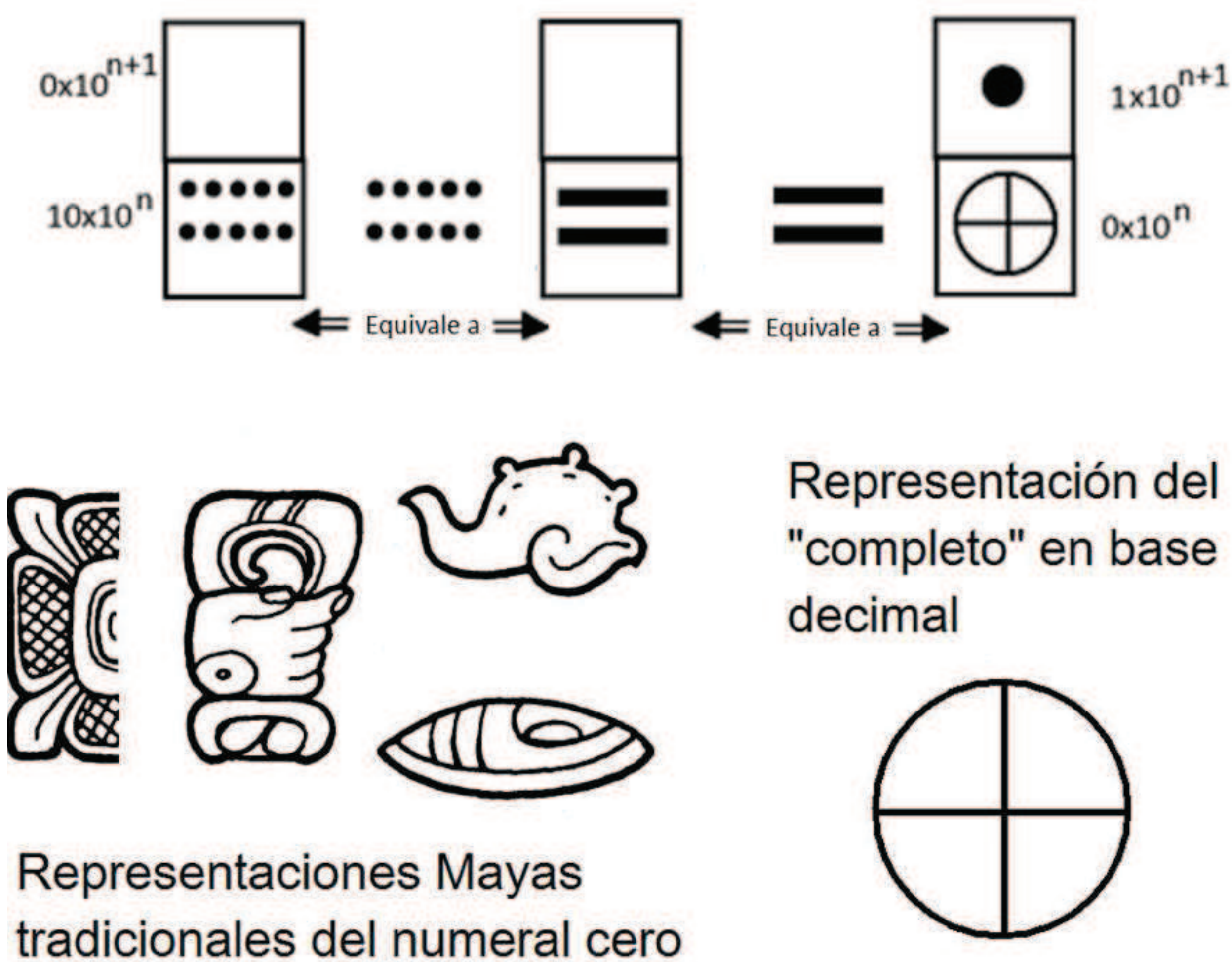

Figura 3. Representaciones de símbolos mayas para el número cero y el símbolo “completo”

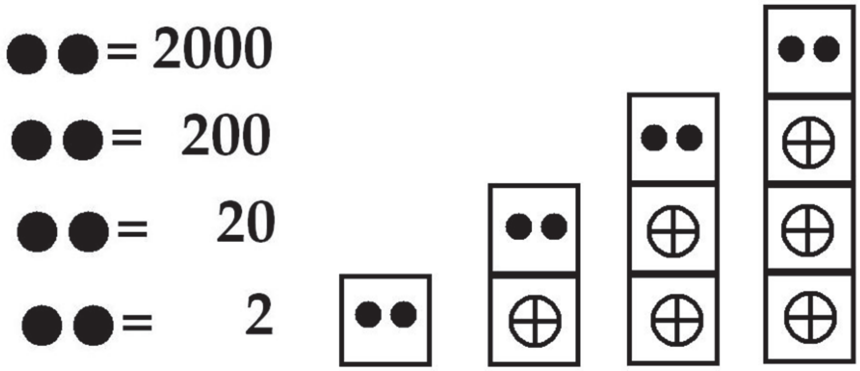

Figura 4. Sistema posicional en el tablero Maya

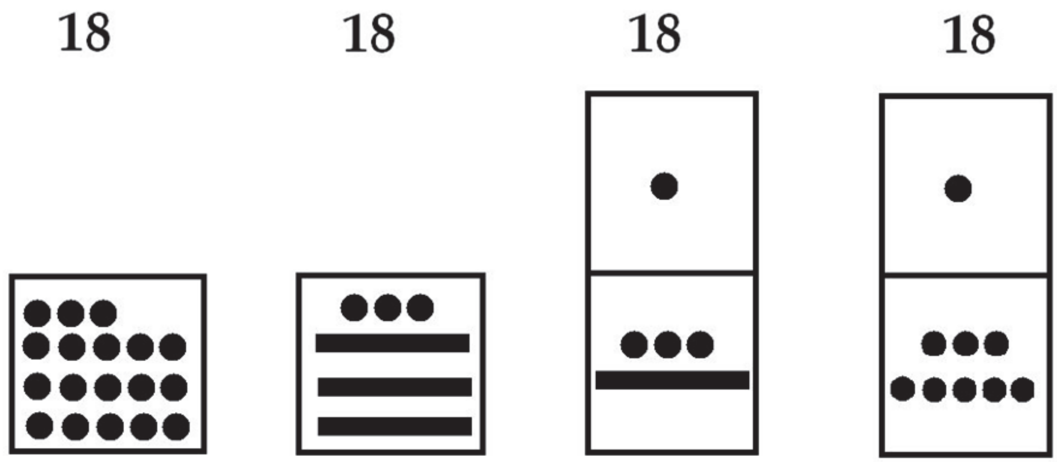

Figura 5. Diferentes representaciones del mismo número

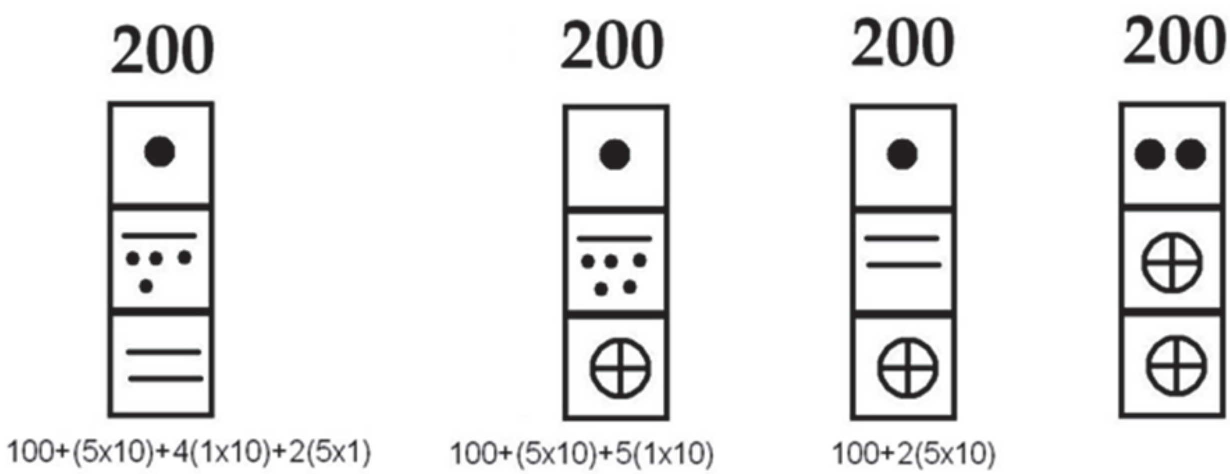

Figura 6. Equivalencias numéricas de los valores posicionales

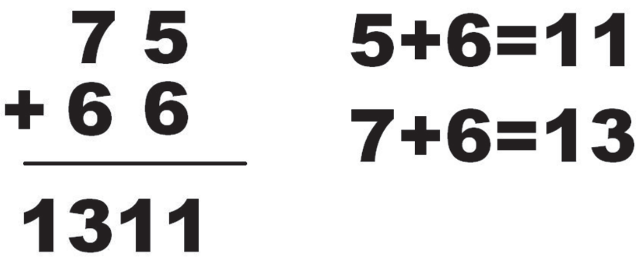

Figura 7. Suma sin agrupación (patrón erróneo A.Add)

dio (véase tabla 1).

Resultados

Con el fin de precisar los resultados, sólo se reportan los problemas más representativos como ejemplos de los patrones de error. De la misma manera, los patrones observados son más una combinación de patrones y conceptos erróneos que eventos aislados de los patrones analizados. Debido a esta situación, aun y cuando se observó que no todos los patrones de error codificados se presentaron a través del desarrollo de los problemas planteados, un análisis posterior relacionado con la forma en que estos patrones de error y los conceptos erróneos implicados pueden afectar a la solución de los problemas planteados se analizan a continuación.

Análisis de patrón de error A.Add

Este patrón refleja una idea falsa relacionada con los valores de posición de números (véase figura 7). Además, se ha desarrollado como unidades independientes del valor numérico relativo y el resultado no es exacto, debido a la falta de agrupación de los resultados parciales.

El algoritmo Maya para esta adición se desarrolla de la misma manera. Observamos en el resultado parcial los mismos números obtenidos como resultado en el algoritmo anterior, dos líneas y un punto de la celda de las unidades (con un valor de once), y dos líneas y tres puntos en la celda de las decenas (con un valor de ciento treinta). Debido a la equivalencia de valores del sistema maya este resultado parcial es aceptable, pero con el fin de obtener un resultado preciso, una acción posterior de agrupación es necesaria (véase la Figura 8).

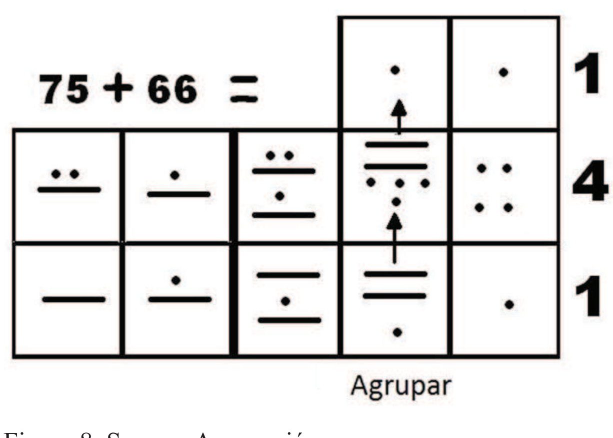

Figura 8. Suma y Agrupación

Análisis de patrón de error B.Add

Una de las principales características en el algoritmo tradicional de la suma de números Naturales es la necesidad de un orden específico en el desarrollo del algoritmo. En este patrón, la adición se desarrolló a partir de la columna de las centenas con una acción de “llevar” a las columnas de las decenas y las unidades, finalizando con un resultado inexacto (véase figura 9).

Debido a la barrera que las celdas en el tablero maya de cálculo presentan, realmente no importa dónde se inicia el algoritmo. Además, este procedimiento es desarrollado por filas y los valores obtenidos mantienen su valor relativo indicado por la celda en que se encuentran, hasta que estos números son reagrupados (Véase figura 10).

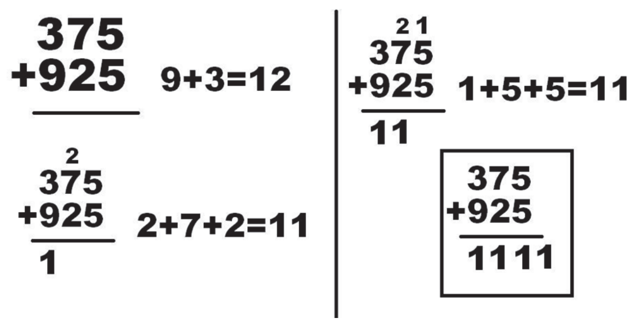

Figura 9. Patrón de error relacionado con el orden en una adición tradicional

Análisis de combinación de patrones de error A.Sub y B.Sub.

Como se observa, el patrón de error A.Sub se produce debido a que un número más pequeño siempre se resta de un número más grande, sin tomar en cuenta el valor posicional del número o si se trata del minuendo o del sustraendo (véase figura 11). De la misma manera, el patrón B.Sub se observa cuando una resta de cero tiene como resultado el valor del número más grande. Este patrón puede estar relacionado con la falta de conocimiento de los números negativos y se usará sólo como un ejemplo en este estudio (véase figura 12).

El uso de la estrategia de agrupar con numerales mayas nos permitirá observar que el número entero en el minuendo es siempre más grande que el sustraendo, ya que se encuentra dentro de la celda superior (véase figura 13). En otro resultado, observamos que después del proceso de desagrupar, el concepto del numeral cero como "nada " es independiente del concepto del numeral cero como " completo ", ya que este numeral indica un valor mayor desde donde restar o en su caso sumar un número menor y no un conjunto vacío (véase figura 14).

La dualidad de valores para el número cero en esta representación matemática se sustituye en una primera representación con el nuevo símbolo de "completo " cuando se representa un valor de una potencia de diez, y en una

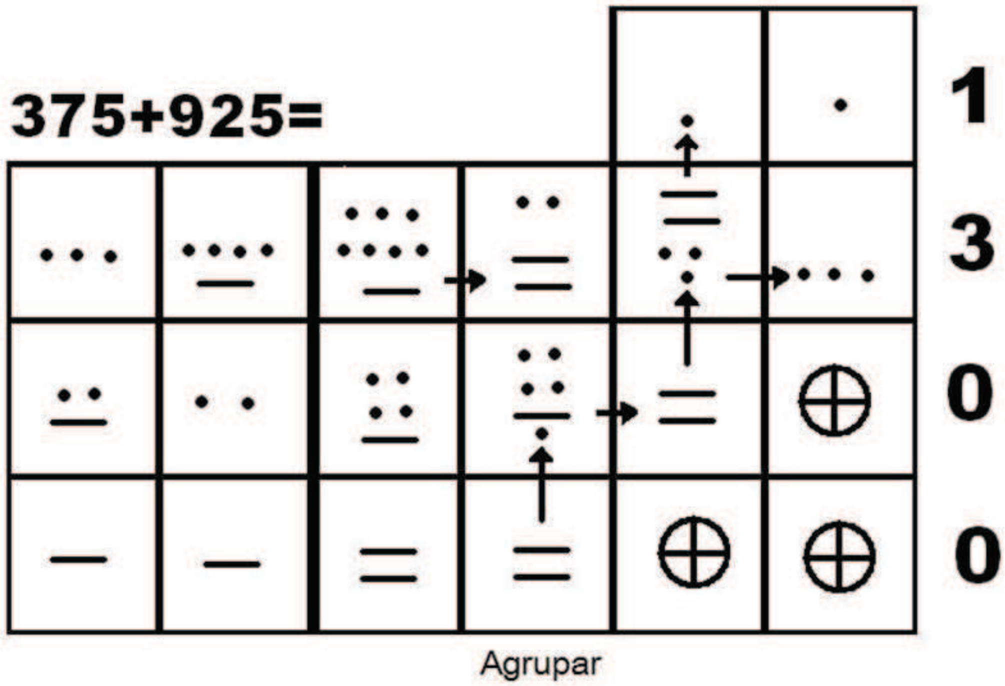

Figura 10. Representación del algoritmo maya de la suma empezando por cualquier fila

423
- 368

8-3=5
6-2=4
4-3=1

423
- 368
145

Figura 11. La sustracción de un número menor (patrón erróneo A.Sub)

segunda, con una celda vacía cuando no hay un número para representar. Es necesario recalcar que cuando el símbolo de "completo" se muestra en una celda, este símbolo se utiliza siempre con al menos un punto en el siguiente nivel, lo que indica un valor de una potencia de diez (véase figura 15).

Esta separación del concepto dual del número cero podría ayudar a comprender el concepto tradicional en los números arábigos y en los algoritmos tradicionales para números Naturales.

Análisis de combinación de patrones de error B.Sub y C.Sub.

Una de las definiciones informales que más confusión causa en los estudiantes está relacionado con la acción de " tomar prestado ", " llevar " ("*carry* " o "*borrow*" en idioma Inglés) en el desarrollo tradicional de los algoritmos de suma y resta. Observamos que una combinación de estos dos patrones se presenta en la solución de una resta. Cuando se necesita agrupar más de una vez, el valor correcto no se resta de la columna " prestada ", y en la última parte del algoritmo, se utiliza otro "préstamo" cuando no se necesita (véase figura 16).

Al momento de resolver la resta en la fila de las centenas restamos una celda vacía de dos puntos, sin presentar ningún problema debido al valor de "nada" de la celda vacía. Los otros valores son restados después de desagrupar la fila de las decenas, llegando a la solución final sin

100
- 65

0-5=5
0-6=6
1-0=1

100
- 65
165

Figura 12. Sustracción de un número mayor al cero (patrón erróneo B.Sub)

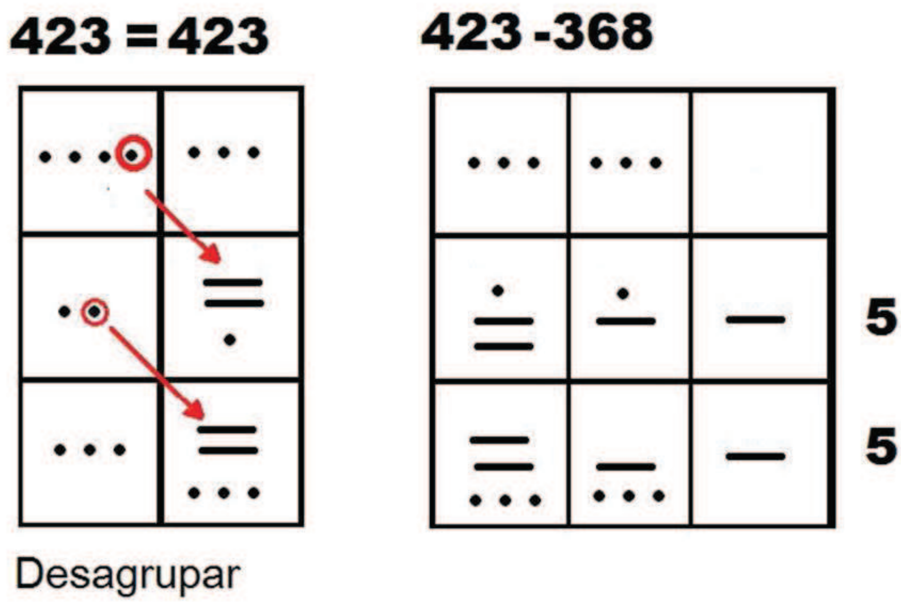

Figura 13. Resta con una estrategia de desagrupar y agrupar

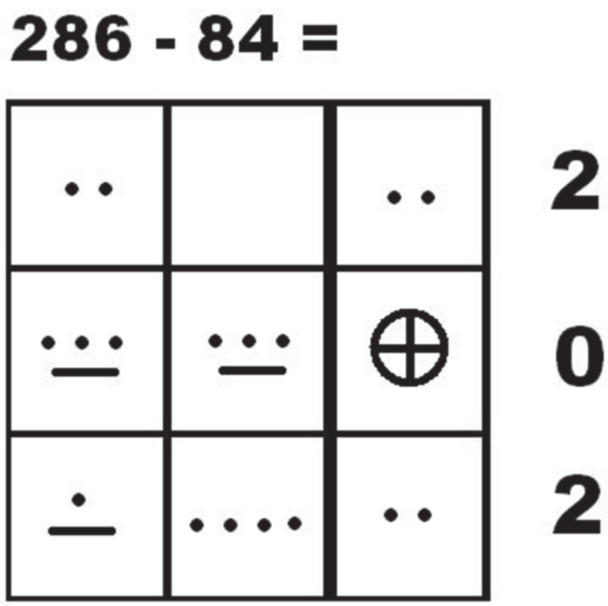

Figura 14. Resta con resultado de cero en numerales hindú-arábigos y con símbolo de “completo” en representación maya

importar en que celda se empiece el algoritmo (véase figura 17).

Análisis de patrón de error A.Mul.

En el análisis de este patrón erróneo en la multiplicación, se observa que en lugar de añadir el número "llevado" al resultado de la multiplicación parcial de las decenas, este se suma al multiplicando en la columna de las decenas, antes de realizar la operación de multiplicación. Este patrón erróneo se repite hasta completar el algoritmo (véase figura 18).

La multiplicación en algoritmos mayas se define como una adición repetida del mismo número, desarrollada por línea. Se observa que después de la adición repetida indicada por el multiplicador, se desarrolla una agrupación posterior, primero por filas y después por columnas (véase figura 19). Como resultado, la multiplicación se resuelve como una adición, en lugar de memorizar tablas de multiplicar.

Análisis de patrón de error A.Div

El análisis de este patrón de error, se observa que en el momento de dividir el número cero en el cociente, este se omite (véase figura 20). Durante el desarrollo del algoritmo maya para la división, como primer paso, se desagrupa un punto en la fila de los millares en dos líneas en la fila de las centenas y se desagrupan cuatro puntos en la fila de las centenas en ocho líneas en la fila de decenas. Esta estrategia nos permitirá tener una cantidad equivalente, pero más manejable para una posterior sustracción repetida (véase figura 21).

Conclusiones

Tradicionalmente, el proceso de enseñanza-aprendizaje de los algoritmos básicos en la escuela es desarrollado como un proceso de memorización e instrucción mecanicista. De la misma manera, es importante señalar que los algoritmos tradicionales nunca fueron desarrollados para un proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que estos procesos fueron la solución a situaciones problemáticas específicas. Como resultado, hay una falta de construcción de significados y profundización de conceptos matemáticos relacionados con el aprendizaje y comprensión del concepto matemático que da sustento a estos algoritmos. En lugar de

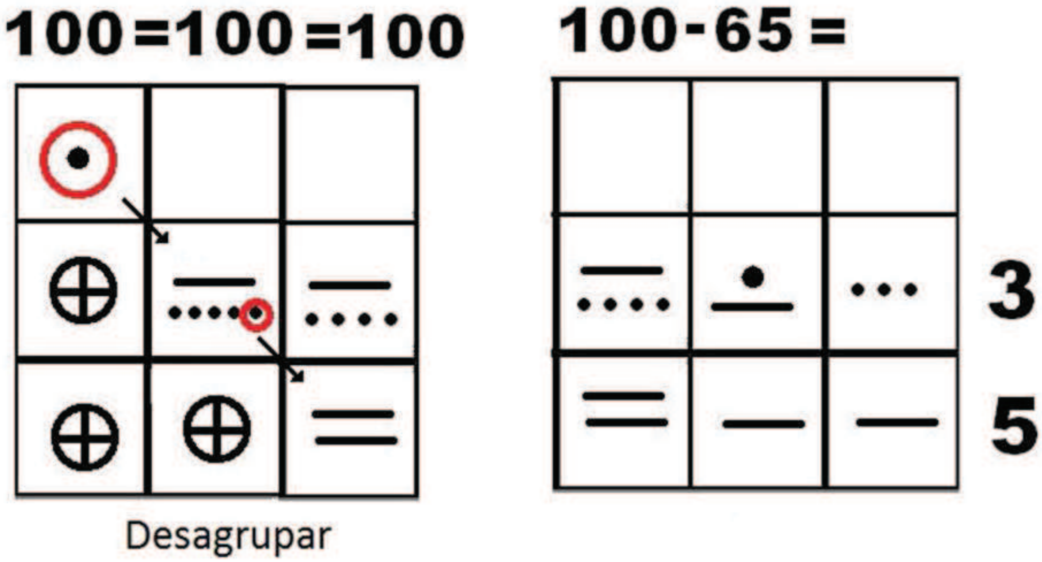

Figura 15. Desagrupamiento en sustracción con el símbolo de “completo”

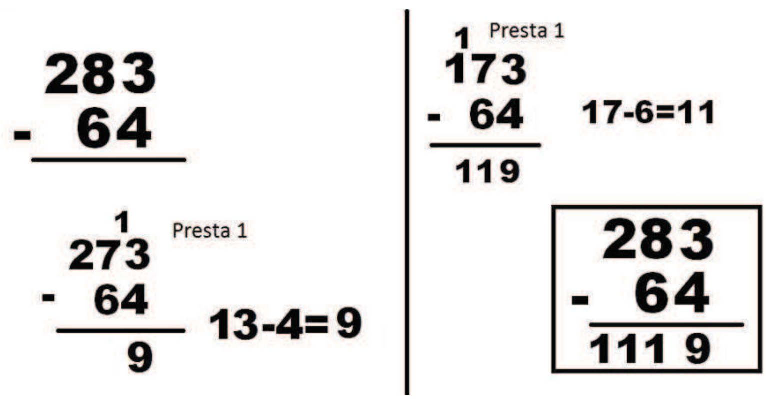

Figura 16. Desagrupamiento innecesario en la sustracción con resultado erróneo

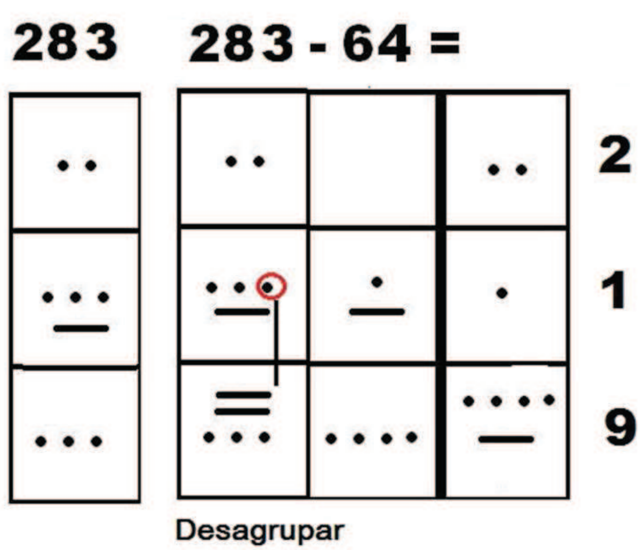

Figura 17. Desagrupar antes de realizar la sustracción

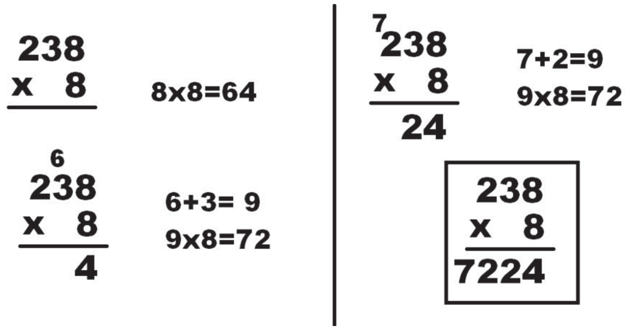

Figura 18. El resultado parcial de la multiplicación se añade al multiplicando en la posición de las decenas y en la posición de las centenas

enseñar cómo fueron desarrolladas estas ideas a través de siglos de esfuerzos matemáticos, la enseñanza tradicional conserva estas construcciones y mantienen el mismo formato desde hace mucho tiempo, por lo que su enseñanza y comprensión derivan en una situación problemática para los alumnos.

Aprender los números arábigos implica reconocer y conceptualizar diez símbolos diferentes, a la vez que hay que aprender cómo estos símbolos pueden representar las unidades, decenas, centenas, etc. De la misma manera, los numerales árabes como la representación de un número, no proporcionan ninguna información visual o referencia que pueda ser recuperada de la observación de estas representaciones, a fin de identificar y comparar la cantidad que estos números representan. Como resultado, la enseñanza de estos números es siempre un reto para los profesores y difícil de entender para los estudiantes, ya que al momento de intentar conectar estos conceptos intuitivamente, no se encuentra ninguna marco de comparación hasta que los símbolos numéricos son memorizados y reconocidos. El uso de los números arábigos no proporciona una manera fácil de comprender, aprender y aplicar estos conceptos.

Uno de los principales hallazgos en este estudio se relaciona con la precisión de los resultados matemáticos y su posterior traducción al idioma Inglés. Estos resultados eran correctos de forma matemática, pero en el momento en que el sujeto traducía estos resultados matemáticamente correctos al idioma Inglés, se detectaron algunas confusiones. El sujeto nombraba décimas por decenas (*tenths* en lugar de *tens*) o centésimas por centenas (*hundredths* en lugar de *hundreds*). Este hallazgo podría indicar que el lenguaje matemático y su comprensión son independientes del lenguaje oral. Es importante recordar que las traducciones de un registro semiótico diferente (tal como la algebraica o la tabular) a la lengua oral podrían representar un problema para los profesores de enseñanza de las matemáticas en entornos multiculturales, debido a la falta de conocimiento de otras lenguas orales y algunos procedimientos y estrategias diferentes aplicadas por los estudiantes cuando se centran en la solución de estos problemas.

La enseñanza de las Matemáticas se relaciona con un proceso significativo de descubrimiento y construcción de ideas. En otros términos, tenemos que aprender no solo las reglas o procedimientos algorítmicos o la memorización y rutinas que no somos capaces de discutir o mejorar, sino desarrollar el pensamiento matemático sustentado por el análisis y comprensión del mismo. Utilizando sólo tres símbolos dentro de una información más estructurada y manejable, evitando la memorización y proporcionando un contexto visual relacionado con el mundo real, podría ayudar a construir y desarrollar conceptos matemáticos relacionados con la suma, resta, multiplicación y división, en lugar de aceptar estos conceptos tal cual son enseñados tradicionalmente. De la misma manera, los algoritmos mayas se basan sólo en conceptos de adición o sustracción, debido a que la multiplicación y la división son una conse-

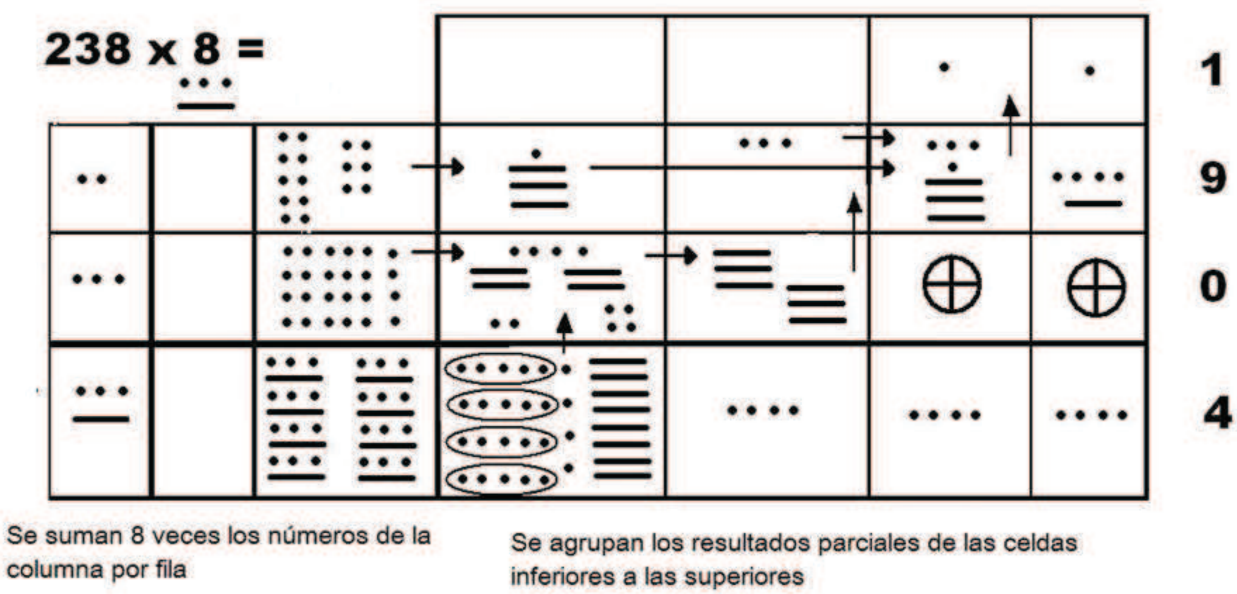

Figura 19. Multiplicación como adiciones sucesivas

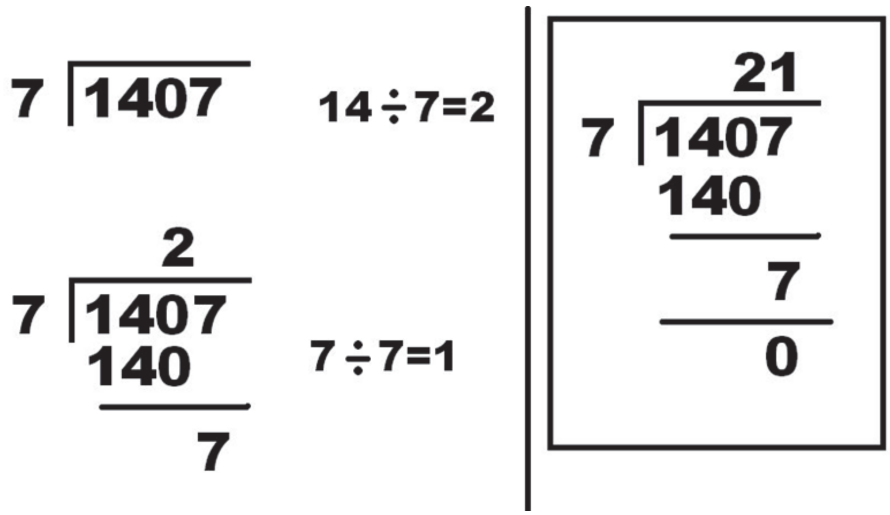

Figura 20. Patrón erróneo en la división del número cero en el cociente

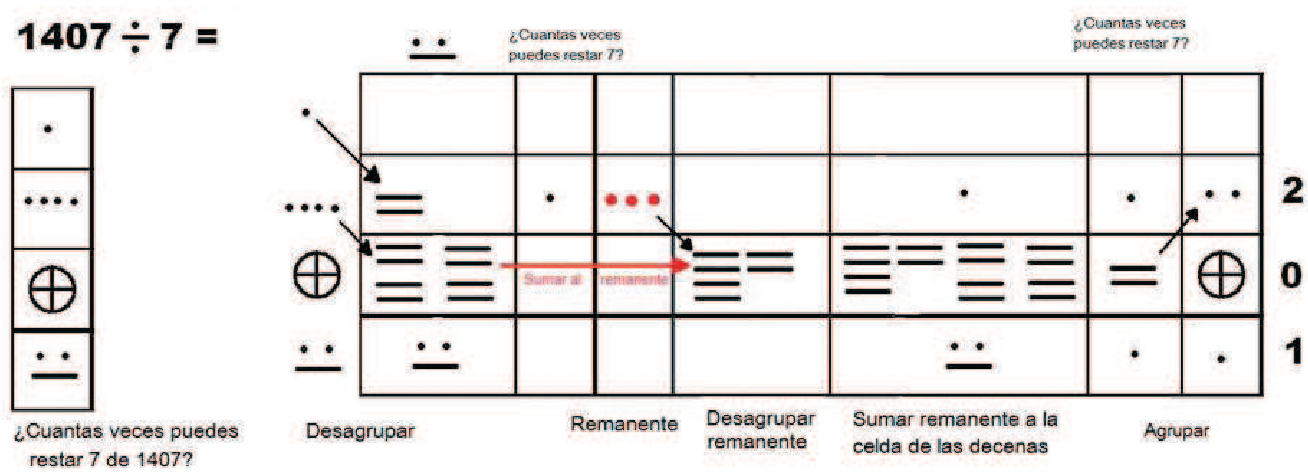

Figura 21. División como sucesivas sustracciones

cuencia de la aplicación de estas ideas relevantes y prácticas.

Referencias

Ashlock, R. B. (2002). *Error patterns in computation.* [*Patrones de error en cálculo*] (8th ed.). New York: Merrill.

Baroody, A. J., Torbeyns, J., y Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. [Comprensión y aplicación que poseen los niños acerca de los principios relacionados con la resta]. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*, doi: 10.1080/10986060802583873.

Calderón, H. M. (1996). La ciencia matemática de los Mayas. México: Editorial Órion.

Campbell, P. F., Rowan, T. E. y Suarez, A. E. (1998). In L. Morrow y M. Kenney (Eds.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics, 1998 NCTM yearbook* (pp. 49-55) [*La enseñanza y aprendizaje de algoritmos en la clase de matemáticas, 1998, Anuario de la NCTM*]. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Center for Mathematics Education Project (2007) *Algebra 2, Illinois.* USA. Center for Mathematics Education Project. Prentice Hall.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* México: Pearson Education de México.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas.

Cruz, J. (2009). *Diversas concepciones de asíntotas como elementos didácticos en la conceptualización del límite a nivel precálculo.* Argentina: El Cid Editores.

Delprato, M. F. (2005). Educación de adultos. ¿Saberes Matemáticos previos o saberes previos a los Matemáticos? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *2*(8), 129-144.

Even, R., y Kvatanski, T. (2009). Approaches to teaching mathematics in lower-achieving classes [Acercamientos sobre la enseñanza de las matemáticas en clases de bajo rendimiento]. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*, 957-985.

Glaser, B. G. y Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research* [*El descubrimiento de la Teoría Fundamentada: Estrategias para la investigación cualitativa*]. New York: Transaction Publishers.

Kamii, C., y Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4 {Efectos dañinos en la enseñanza de algoritmos en los grados 1-4]. En L. Morrow y M. Kenney (Eds.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics, 1998 NCTM yearbook* (pp. 130-140). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Lam, E., Magaña, L. F., y De Oteyza, E. (2008). *Puntos, rayas y caracoles. Matemáticas rápidas y divertidas con ayuda de los mayas*. (p. 97). Mexico: Distribuciones Litoral, S.A. de C.V.

Lu, S. (2009). How to prevent from regarding mathematics as algorithm: A study on the beliefs of mathematics learning by clinical interview [Como evitar considerar los algoritmos como matemáticas. Un estudio de las creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas mediante una entrevista clínica]. *Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 38-51.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción del conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada. IPN, México.

Mercer, C.D., y Mercer, A.R. (1998). *Teaching students with learning problems* [*Enseñando a estudiantes con problemas de aprendizaje*] (5th ed., pp. 171-225). Upper Saddle, NJ: Merrill.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Principles and standards for school mathematics* [*Principios y estandares para las clases de matemáticas*]. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2002). *Helping children learn mathematics*. [*Ayudando a los niños a aprender matemáticas*] Washington, DC: National Academy Press.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., y Verschaffel, L. (2011). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. [Empleo por los niños de la resta por adición en restas largas de un solo dígito] *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.1007/s10649-011-9308-3.

Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning [La estructura acerca del pensamiento proporcional en maestros en entrenamiento]. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149-169.

Ramakrishnan, M. (2011, February, 20). Exploring preservice teachers' understanding of two-digit multiplication [Explorando la comprensión de la multiplicación de dos dígitos en maestros en entrenamiento]. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, Retrieved from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramakrishnanmenon.pdf

Robinson, K., y LeFevre, J. (2011). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework [La relación inversa entre la multiplicación y la division: Conceptos, procedimientos y un marco cognitive]. *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.1007/s10649-011-9330-5.

Rocha, M. I., y Menino, H. A. (2009). Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos [Desarrollo del sentido de número en la multiplicación, un estudio con niños de 7/8 años]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(1), 103-134.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin [Sobre la dualidad de los conceptos matemáticos. Reflexiones sobre los procesos y objetos como lados opuestos de la misma moneda]. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Strauss, A. y Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: grounded theory procedures and techniques* [*Fundamentos de la investigación cualitativa: procedimientos y técnicas de la teoría fundamentada*]. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Schiro, M. (2004). *Oral storytelling y teaching mathematics: pedagogical and multicultural perspectives* [*Narracion oral y enseñanza de las matemáticas: Perspectivas pedagógicas y multiculturales*]. USA: SAGE.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Stassens, N., Ghesquière, P., y Verschaffel, L. (2009). Solving subtraction problems by means of indirect addition [Resolviendo problemas de resta por medio de la suma indirecta]. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*, 79-91.

Valdemoros, M. E. y Ruiz E. F. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 127-157.

Wang, L. (2011). Chinese students' basic computation ability: an assessment on third grade students [Habilidad de cálculo basico de estudiantes chinos: una evaluación de estudiantes de tercer grado]. *Journal of Mathematics Education*, *4*(1), 57-66.