



Título del artículo.

Puntos de cónicas con regla y compás.

Título del artículo en idioma Inglés.

Points of conical shapes with ruler and compass

Autora.

Itzel Moctezuma Barona
Jesús Romero Valencia
Diana Natali Gaspar González

Referencia bibliográfica:

MLA

Moctezuma Barona, Itzel, Jesús Romero Valencia y Diana Natali Gaspar González. Puntos de cónicas con regla y compás. *Tlamati* 9.2, (2018): 68-73. Print.

APA

Moctezuma Barona, I., Romero Valencia, J. y Gaspar González, D. N. (2018). Puntos de cónicas con regla y compás. *Tlamati*, 9(2), 68-73.

ISSN: 2007-2066.

Publicado el 31 de diciembre del 2018

© 2018 Universidad Autónoma de Guerrero

Dirección General de Posgrado e Investigación

Dirección de Investigación

TLAMATI, es una publicación semestral de la Dirección de Investigación de la Universidad Autónoma de Guerrero. El contenido de los artículos es responsabilidad exclusiva de los autores y no refleja de manera alguna el punto de vista de la Dirección de Investigación de la UAGro. Se autoriza la reproducción total o parcial de los artículos previa cita de nuestra publicación.



Puntos de cónicas con regla y compás

Itzel Moctezuma Barona^{1*}
 Jesús Romero Valencia¹
 Diana Natali Gaspar González¹

¹ Universidad Autónoma de Guerrero. Unidad Académica de Matemáticas. C.U. Zona Sur, Edificio A. AV. Lázaro Cárdenas s/n. Colonia La Haciendita. Chilpancingo, Guerrero, México. C. P. 39070. Chilpancingo, Guerrero, México. Tel: +52(747) 471 5651

*Autor de correspondencia
 itmocba@gmail.com

Resumen

En este trabajo exponemos un método para encontrar puntos de secciones cónicas utilizando construcciones básicas con regla y compás y, viceversa. Se expondrá que cualquier punto de las secciones cónicas analizadas se puede encontrar con dicho método.

Palabras clave: Secciones cónicas, construcciones geométricas

Abstract

Aim of this paper is a proposal for a method to find points of conic sections using basic constructions with ruler and compass and vice versa. It will be explained that any point of the conic sections analyzed can be found with said method.

Keywords: Conic sections, geometric constructions

Introducción

En la antigüedad el hombre se comunicaba y expresaba a través de dibujos, con el paso del tiempo fue adquiriendo conocimiento matemático y se vio en la necesidad de utilizar herramientas que permitieran perfeccionar cada uno de los trazos que realizaban, tales como circunferencias y rectas. Pero para todos es evidente que el mundo no está hecho de abstracciones y sin embargo, hemos aceptado la idea de la existencia de objetos perfectos como los anteriores. Con esta idea se crean dos objetos que hacen posible este hecho: la regla y el compás. En Grecia consideraban importante las demostraciones prácticas en la geometría, a partir de esta idea se presentaron nuevos problemas para los matemáticos de esa época y debido a uno de ellos surgieron las secciones cónicas, este problema era el de duplicar un cubo, el cual consistía en lo siguiente: dado un cubo, construir otro cubo cuyo volumen sea el doble del primero, sin usar más que un compás y una regla (no graduada y de un solo lado). Así fue que Menecmo (350 A. C.) descubrió las cónicas y fue Apolonio de Perga (262-190 A. C.) el primero en estudiarlas detalladamente, encontrar la propiedad plana que las definía y clasificarlas en tres tipos a los que dio el nombre de elipses, hipérbolas y parábolas.

Las construcciones que se realizaron mediante regla y compás fueron tomando importancia a través del tiempo. Después de haber hecho mención acerca de los tres problemas clásicos griegos (duplicación de un cubo, trisección del ángulo y cuadratura del círculo) los geómetras se dieron a la tarea de poner restricciones en la utilización de estos instrumentos. El primer trabajo relacionado con estas restricciones está basada en la idea de construir un pentágono regular con regla y un compás rígido cuya apertura no puede modificarse. Tal construcción fue realizada por el matemático persa Abul Wefa en el siglo X. En 1694, un agrimensor londinense, William Leybourn, en un libro llamado *Pleasure with Profit* (Leybourn, Sault y Hume Marchmont, 1694), trató las construcciones con regla y compás rígido como una forma de juego matemático; en el encabezado de su sección dedicada al tema, escribió: "...mostrando cómo (sin compás), teniendo solamente un tenedor corriente (o una horquilla semejante, que no abriré ni cerraré), y una regla lisa, pueden realizarse muchas deliciosas y divertidas operaciones geométricas". Alrededor del año 300 A. C., se escribió uno de los libros de texto más divulgados en la historia y el segundo en número de

Como citar el artículo:

Moctezuma Barona, I., Romero Valencia, J. y Gaspar González, D. N. (2018). Puntos de cónicas con regla y compás. *Tlamati*, 9(2), 68-73.

ediciones publicadas, después de la Biblia, es el libro llamado: los *Elementos de Euclides* (Fitzpatrick, 2007). Dicho libro contiene toda una gama de construcciones elaboradas con regla y compás, por ejemplo: se muestra cómo trazar un triángulo equilátero teniendo solamente un segmento, dados dos segmentos desiguales, cortar del mayor un segmento igual al menor.

En estas notas, utilizando únicamente regla y compás mostraremos un método para encontrar puntos sobre una cónica \mathcal{C} y veremos también que dado cualquier punto de \mathcal{C} éste puede encontrarse con dicho método.

Materiales y Métodos.

Utilizando únicamente regla y compás, mostraremos lo siguiente para cualquier cónica \mathcal{C} :

1. Un método para encontrar puntos sobre \mathcal{C} ;
2. Cualquier punto de \mathcal{C} puede encontrarse con este método.

Lo anterior lo haremos a partir de la misma definición de \mathcal{C} y únicamente mediante construcciones básicas, como las paralelas, perpendiculares y punto medio de un segmento.

Resultados.

Parábola

A continuación, para cada cónica \mathcal{C} daremos un algoritmo que nos permitirá encontrar puntos de \mathcal{C} .

Las parábolas difícilmente son apreciadas en su totalidad, sin embargo, aunque muchas veces no estamos conscientes de ello, tenemos muchas representaciones de estas en la vida cotidiana, por ejemplo: la trayectoria que describe un objeto al ser lanzado, al visualizar el desplazamiento del agua en una fuente bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra, cuando brincamos la cuerda podemos observar que se forma una serie de parábolas, otro suceso importante no muy conocido es la ley de Kepler que afirma lo siguiente: bajo la fuerza de atracción gravitacional de un objeto astronómico el movimiento de otro a su alrededor sigue una trayectoria cónica; los cometas y algunos cuerpos menores del Sistema solar tienen órbitas que toman una trayectoria parabólica.

Definición: Una *parábola* es un conjunto de puntos en el plano de tal manera que cada uno de estos puntos satisface lo siguiente: su distancia a una recta fija es igual a su distancia a un punto fijo, que no pertenece a el segmento de recta. El segmento de recta fija se llama *directriz* y el punto fijo *foco*.

Algoritmo: utilizando únicamente regla y compás, trazamos puntos de una parábola \mathcal{P} , cuando conocemos su foco F y directriz d .

1. Trazamos una recta e perpendicular a d que pase por F y llamamos O al punto de intersección de e con d . Si V es el punto medio del segmento OF , entonces $V \in \mathcal{P}$ puesto que $d(V, F) = d(V, d)$.
2. Consideremos ahora el segmento de recta t paralela a d y que pasa por V , la divide al plano en dos semiplanos: uno que contiene a F y otro que contiene a d . Ahora elijamos un punto cualquiera A sobre e del lado del semiplano que contiene a F . Trazamos el segmento de recta a paralela a d que pasa por A (véase figura 1)

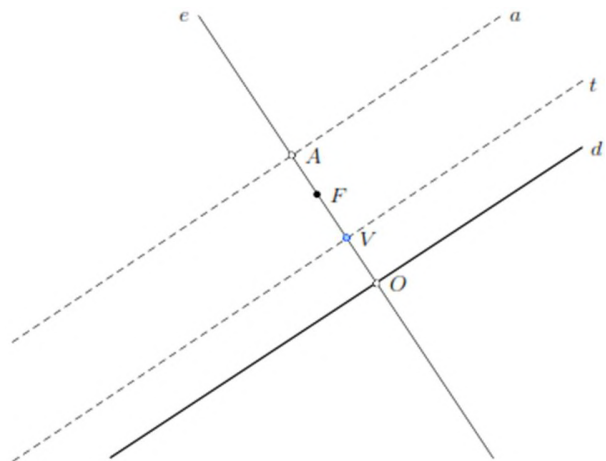


Figura 1. Bosquejo de puntos y rectas trazadas en la construcción de una parábola.)

3. A continuación, trazamos una circunferencia con centro en F y radio $d(O, A)$, la cual interseca a a en dos puntos P_1 y Q_1 .

Notemos que $d(P_1, d) = d(Q_1, d) = d(A, O)$, puesto que a y d son paralelas y además $d(F, P_1) = d(O, A) = d(F, Q_1)$, luego $P_1, Q_1 \in \mathcal{P}$ (véase figura 2)

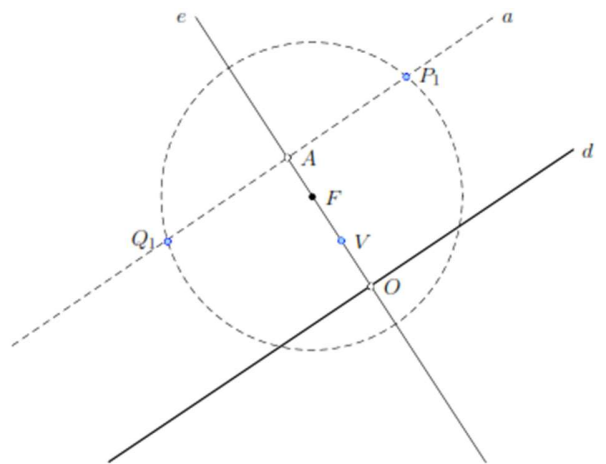


Figura 2. P_1 y Q_1 puntos de intersección entre la circunferencia con el segmento de recta a

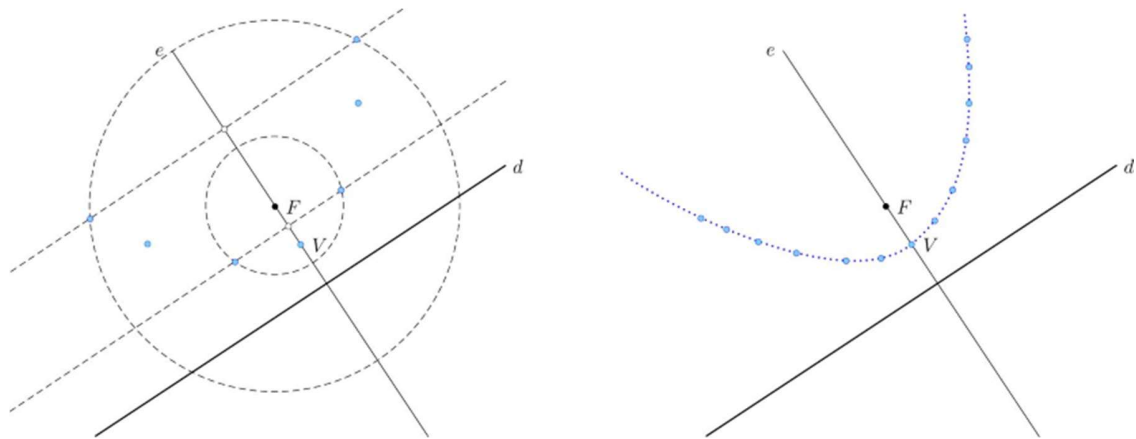


Figura 3. Bosquejo de la parábola.

4. Repitiendo los pasos anteriores, podemos encontrar más puntos que pertenecerán a \mathcal{P} (véase figura 3).

Notemos que cualquier punto $P \in \mathcal{P}$ puede encontrarse mediante el algoritmo antes citado.

1. Trazamos el segmento de recta e perpendicular a d que pasa por F y el segmento de recta a paralela a d que pasa por P . Llamemos A al punto de intersección de e con a .
2. Aplicando el procedimiento a partir del punto A obtenemos dos puntos de \mathcal{P} , uno de los cuales es P (véase figura 4).

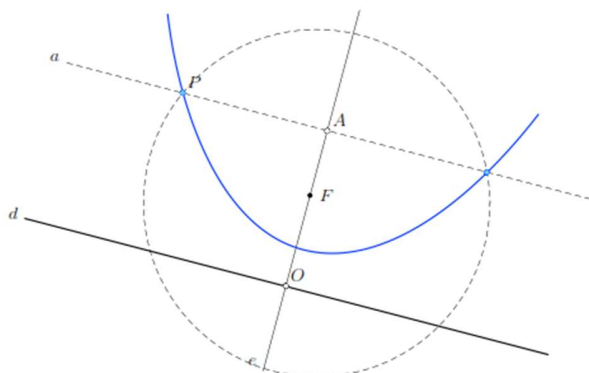


Figura 4. Obtención del punto P a partir del algoritmo.

Elipse

Alrededor de 1609, Johannes Kleper descubrió que las curvas que describen los planetas en su movimiento de traslación alrededor del sol son elípticas, como consecuencia logró realizar grandes cambios en la teoría del estudio del comportamiento del universo.

Definición: Una *elipse* es un conjunto de puntos en el plano de tal manera que cada uno de estos puntos

satisface lo siguiente: la suma de sus distancias a dos puntos fijos es igual a una constante, mayor que la distancia entre estos dos puntos. Los puntos fijos se llaman *focos*.

Algoritmo: sean F y F_1 los focos de una elipse \mathcal{E} y la cantidad constante es $2a > d(F, F_1)$.

1. Trazamos el segmento de recta e que pasa por F y F_1 . Sea C el punto medio del segmento FF_1 .
2. A continuación, consideramos una circunferencia con centro C y radio a . Si V y V_1 son los puntos de intersección de esta circunferencia con e , entonces $V, V_1 \in \mathcal{E}$ puesto que:

$$d(V, F) + d(V, F_1) = d(V, F) + d(F, F_1) + d(F_1, V_1) = 2a;$$

Análogamente se verifica para V_1 (véase figura 5).

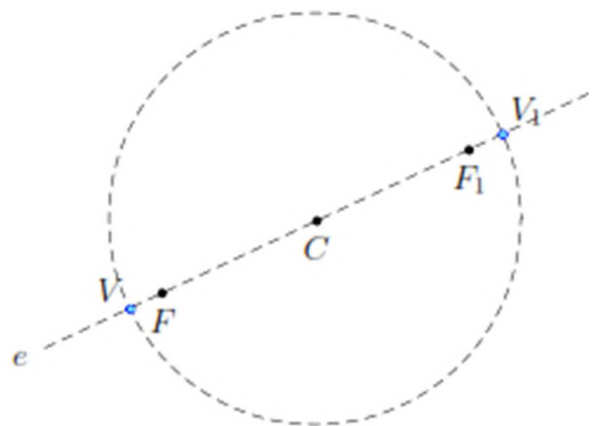


Figura 5. V y V_1 puntos de intersección entre la circunferencia con el segmento de recta e .

1. Tomamos un punto interior del segmento FF_1 , digamos A , y trazamos dos circunferencias: una con centro en F y radio $d(V,A)$ y la otra con centro en F_1 y radio $d(V_1,A)$. Estas circunferencias se intersecan, pues el radio de cada una de ellas es mayor a la distancia $\frac{d(F,F_1)}{2}$

Sean P_1 y Q_1 los puntos de intersección de estas circunferencias, entonces $P_1, Q_1 \in \mathcal{E}$, pues como $d(V,A) = d(F,P_1)$ y $d(A,V_1) = d(F_1,P_1)$ tenemos:

$d(F,P_1) + d(F_1,P_1) = d(V,A) + d(A,V_1) = 2a$; de manera análoga se verifica para Q_1 (véase figura 6).

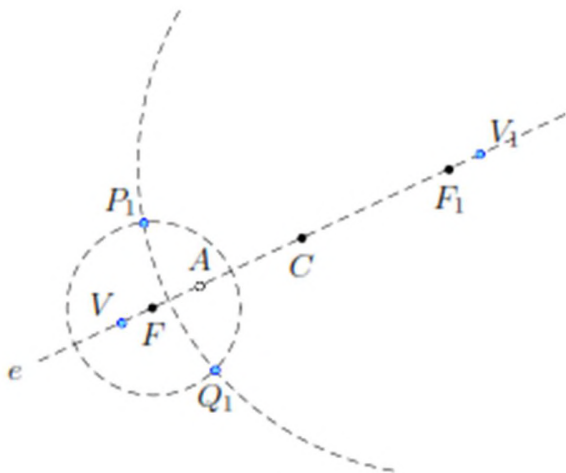


Figura 6. Obtención de los puntos P_1 y Q_1 a partir de la intersección de las dos circunferencias.

1. Utilizando el procedimiento anterior podemos encontrar más puntos que pertenecerán a \mathcal{E} (véase figura 7).

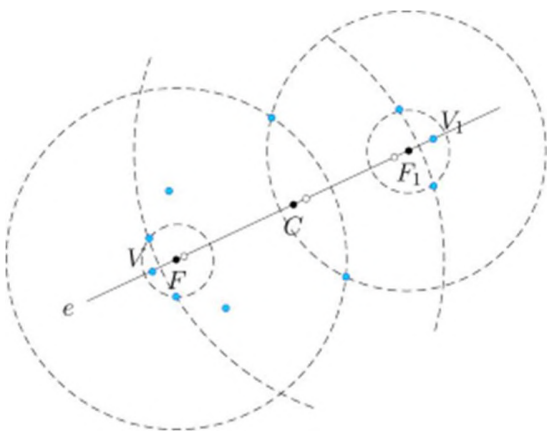


Figura 7. Bosquejo de la elipse.

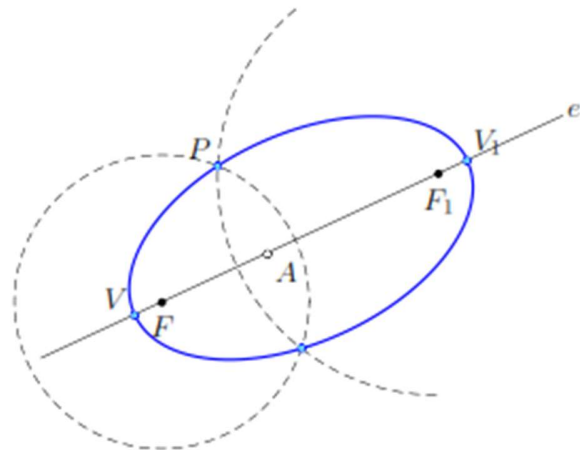


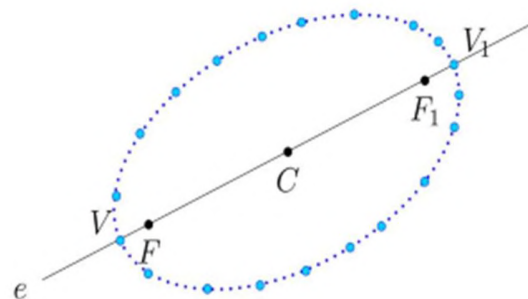
Figura 8. Obtención del punto P a partir del algoritmo.

Ahora veamos que si $P \in \mathcal{E}$, entonces P puede encontrarse mediante el algoritmo de arriba.

1. Trazamos el segmento de recta e que pasa por F y F_1 y llamemos V y V_1 a los puntos de intersección de \mathcal{E} con e .
2. Trazamos una circunferencia con centro en V y radio $d(F,P)$, la cual interseca al segmento FF_1 en un punto A .
3. Aplicando el método a partir del punto A obtenemos dos puntos de \mathcal{E} , uno de los cuales es P (véase figura 8)

Hipérbola

La hipérbola tiene algunas propiedades interesantes que le permiten jugar un papel importante en el mundo real, por ejemplo, al usar una linterna (cuyo haz de luz es cónico) y colocarla paralela a una pared, el borde de luz que se ve contra la pared es una hipérbola perfecta.



Fue también Johannes Kepler quien descubrió que la trayectoria de algunos cometas describe una órbita hipérbola; esto sucede cuando un cuerpo celeste proveniente del exterior del sistema solar es atraído por el sol (teniendo como un foco al sol), lo que ocasiona que el cometa salga nuevamente del sistema solar.

Definición: Una *hipérbola* es un conjunto de puntos en el plano de tal manera que cada uno de estos puntos satisface lo siguiente: el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los puntos fijos. Los puntos fijos son llamados *focos*.

Algoritmo: consideremos una hipérbola \mathcal{H} con focos F y F_1 y la cantidad constante $2a < d(F, F_1)$.

1. Trazamos el segmento de recta e que pasa por F y F_1 y llamamos C al punto medio del segmento FF_1 .
2. A continuación, trazamos una circunferencia con centro en C y radio a , la cual interseca a e en dos puntos V y V_1 .

Notemos que $d(V, F) = d(V_1, F_1)$ y además:

$$d(V, F_1) - d(V, F) = d(V, V_1) + d(V_1, F_1) - d(V, F) = 2a,$$

lo que implica que $V \in \mathcal{H}$, de la misma forma se verifica que $V_1 \in \mathcal{H}$ (véase figura 9).

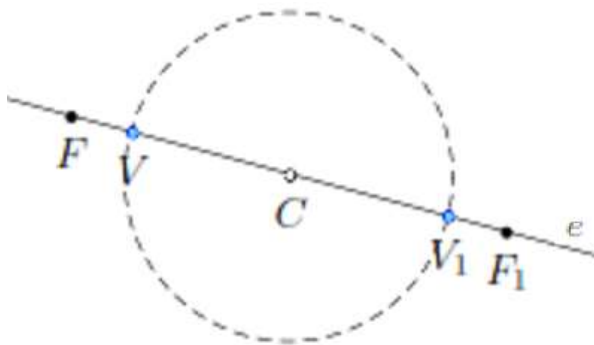


Figura 9. V y V_1 puntos formados por la intersección de la circunferencia con el segmento de recta e .

3. Ahora tomemos un punto $A \in e$ de tal manera que esté fuera del segmento FF_1 . Trazamos dos circunferencias, una con centro en F y radio $d(A, V)$ y otra con centro en F_1 y radio de $d(A, V_1)$, estas se intersecan en dos puntos P_1 y Q_1 .

Como P_1 satisface lo siguiente:

$$d(P_1, F_1) - d(P_1, F) = d(A, V_1) - d(A, V) = d(V, V_1) = 2a,$$

entonces $P_1 \in \mathcal{H}$, de igual forma se verifica que $Q_1 \in \mathcal{H}$ (véase figura 10).

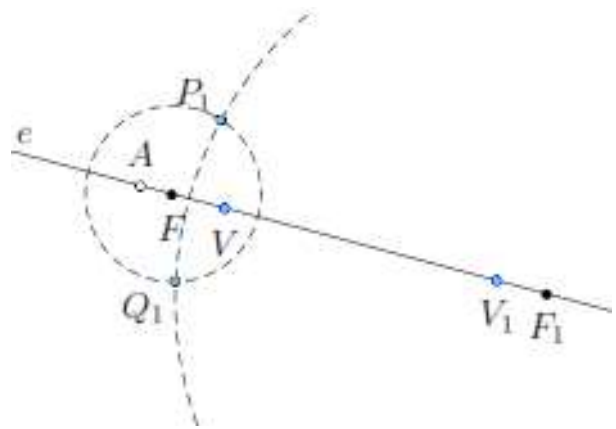


Figura 10. Ubicación de los puntos A , P_1 y Q_1

4. Repitiendo el procedimiento anterior, podemos encontrar más puntos que pertenezcan a \mathcal{H} .
5. Lo mismo hacemos ahora tomando puntos del otro lado del segmento FF_1 (véase figura 11).

Ahora veamos que si $P \in \mathcal{H}$, entonces P puede encontrarse mediante el algoritmo de arriba.

1. Trazamos el segmento de recta e que pasa por F y F_1 y llamemos V y V_1 a los puntos de intersección de \mathcal{H} con e .
2. Trazamos una circunferencia con centro en V_1 y radio $d(F_1, P)$, la cual interseca a e en un punto A exterior al segmento FF_1 .
3. Aplicando nuestro procedimiento a partir del punto A obtenemos dos puntos de \mathcal{H} , uno de los cuales es P (véase figura 12)

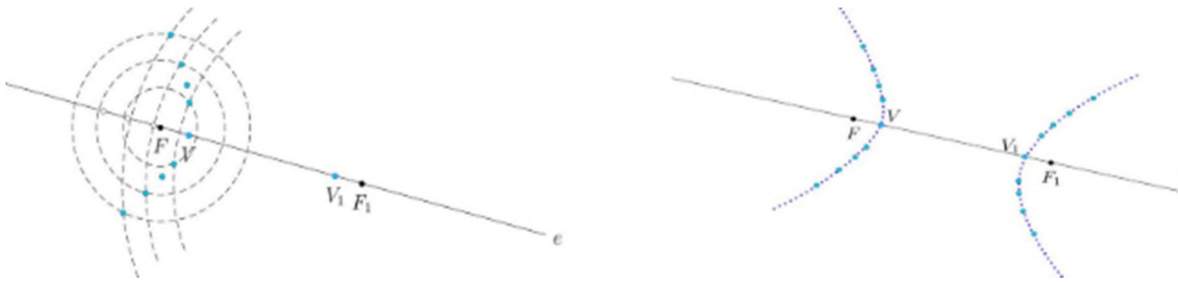


Figura 11. Bosquejo de la hipérbola.

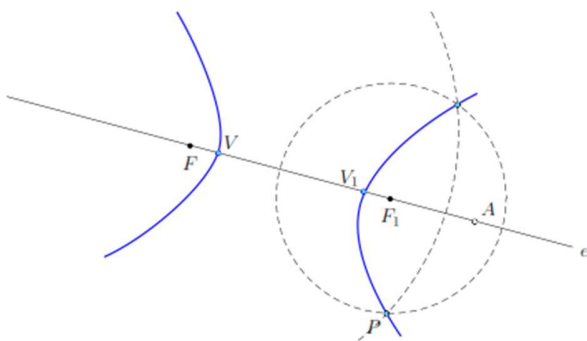


Figura 12. Obtención del punto P a partir del algoritmo.

Discusión y conclusiones

Revisando el contenido de algunos libros de Geometría Analítica de autores como José Fabio González Argüello (1996), Charles H. Lehmann (2009), Joseph H. Kindle (1970), Roberto Figueroa García (1996), Gordon Fuller y Dalton Tarwater (1986), observamos que ninguno de estos tiene algún apartado dedicado a la construcción de puntos de cónicas con regla y compás.

Sin embargo, nos parece importante conocer un procedimiento que se pueda llevar a cabo para obtenerlas, ya que las demostraciones prácticas fueron el punto de partida de la creación de las cónicas.

Referencias

- Figueroa García, R. (1996). *Geometría Analítica*. Lima, PRU. Ediciones RFG. 530 pp.
- Fitzpatrick, R. (2007) *Euclid's elements of geometry*, England. 545p.
- Fuller, G. y Tarwater, D. (1986). *Geometría Analítica*. Reading Massachusetts, USA, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- González Argüello, J. F. (1996). *Geometría Analítica*. San José. CTR. EUNED. 308 pp.
- Kindle, J. H. (1970). *Geometría Analítica*. CDMX. MX. McGraw Hill. 148 pp.
- Lehmann C. H. (2009). *Geometría Analítica*, CDMX. MX. Limusa, 512 pp.
- Leybourn, W., Sault, R. y Hume Marchmont, A. (1694). *Pleasure for profit*. London, ENG. R. Baldwin and J. Dunton,